Image des opérateurs d'entrelacements normalisés et pôles des séries d'Eisenstein

Colette Moeglin

Image des opérateurs d'entrelacements normalisés et pôles des séries d'Eisenstein

C. Mœglin
Institut de Mathématiques de Jussieu
CNRS

Résumé

On a montré en [20] comment normaliser les opérateurs d'entrelacement standard de façon à assurer l'holomorphie dans le domaine positif. L'objet de ce travail est de décrire l'image des ces opérateurs et on montre que cette image est soit nulle soit irréductible. Dans les cas ayant des applications globales on décrit l'image en termes de paramètres dans les paquets d'Arthur. On termine l'article en donnant explicitemment les résidus de séries d'Eisenstein dans le cas d'un parabolique maximal et d'une induite de représentation automorphes de carré intégrable modulo le centre. Ce travail admet les résultats annoncés par Arthur sur la classification en paquet des représentations automorphes de carré intégrable, mais pas les formules de multiplicités fines.

1 Introduction

Ici G est un groupe classique, disons $Sp(2n)$ ou $SO(2n+1)$ et nos méthodes s'appliquent aussi à $O(2n)$ (mais il faut faire quelques vérifications liées à la non connexité) et aux groupes unitaires avec des changements de notations pour se mettre dans le cadre de [16].
On note G^* le groupe classique algébrique dual de G ; G^* est vu comme un sous-groupe complexe d'un certain $GL(m_G^*, \mathbb{C})$ (ce qui définit m_G^*) via sa représentation naturelle. On fixe aussi F un corps p-adique et k un corps de nombres. Dans la partie locale, on suppose que G est défini sur F et on confondra G et $G(F)$.
On fixe ψ une représentation unitaire irréductible de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ et on suppose que ψ est de dimension m_G^* et se factorise par G^*. Grâce à la correspondance de Langlands local pour les groupes GL, on sait associer à ψ une représentation unitaire de $GL(m_G^*, F)$, notée $\pi^{GL}(\psi)$.
On fixe aussi une représentation ρ cuspidale unitaire irréductible d'un groupe linéaire $GL(d_\rho, F)$ (cela définit d_ρ) et un entier a_0 ; cela permet de former la représentation de Steinberg $St(\rho, a_0)$ du groupe $GL(d_\rho a, F)$. Au groupe classique G et à tout entier d, on associe une représentation $r_{G,d}$ (en général on enlève le d) de $GL(d,\mathbb{C})$ qui est $\wedge^2\mathbb{C}^d$ si G est un groupe de type $SO(2n+1)$ et $Sym^2\mathbb{C}^d$ si G est de type $Sp(2n)$ ou $O(2n)$.
On définit la fonction méromorphe :

$$r(s,\rho,a_0,\psi) := \frac{L(St(\rho,a_0)\times \pi^{GL}(\psi), s)}{L(St(\rho,a_0)\times \pi^{GL}(\psi), s+1)} \times \frac{L(St(\rho,a_0), r_{G,ad_\rho}, 2s)}{L(St(\rho,a_0), r_{G,ad_\rho}, 2s+1)}.$$

Cette fonction se calcule très facilement ; on écrit $\pi^{GL}(\psi)$ sous-forme d'induite :

$$\pi^{GL}(\psi) = \times_{(\rho',a',b')\in Jord(\psi)} Speh(St(\rho',a'),b'),$$

où ρ' est une représentation cuspidale unitaire d'un groupe GL et a', b' sont des entiers (ce qui définit aussi $Jord(\psi)$). Alors (cf. [19] 2.1.1) $r(s, \rho, a_0, \psi) :=$

$$\prod_{(\rho',a',b')\in Jord(\psi)} \frac{L(St(\rho, a_0) \times St(\rho', a'), s-(b'-1)/2)}{L(St(\rho, a_0) \times St(\rho', a'), s+(b'+1)/2)} \times \frac{L(St(\rho, a_0), r_{G,ad_\rho}, 2s)}{L(St(\rho, a_0), r_{G,ad_\rho}, 2s+1)}.$$

Il est clair que les dénominateurs de la fonction $r(s, \rho, a_0, \psi)$ n'ont ni zéro ni pôle pour $s \in \mathbb{R}_{>-1/2}$. Les numérateurs ont éventuellement des pôles que l'on rappellera ultérieurement. On fixe π dans le paquet d'Arthur associé à ψ ; on rappelle dans le texte ce que cela veut dire et ceci suppose donc que l'on connaisse la classification des représentations cuspidales dans les termes de [15] ; on a montré en [16] les hypothèses minimales qu'il fallait mais évidemment la classification de Langlands des séries discrètes annoncées par Arthur est plus que suffisante comme montré en [18].
Et on considère l'opérateur d'entrelacement standard, bien défini après un choix d'élément du groupe de Weyl, différents choix étant reliés par la multiplication par une fonction holomorphe inversible :

$$M(s, \rho, a_0, \pi) : \qquad St(\rho, a_0)|\,|^s \times \pi \to St(\rho^*, a_0)|\,|^{-s} \times \pi$$

On pose $N_\psi(s, \rho, a_0, \pi) := r(s, \rho, a_0, \psi)^{-1} M(s, \rho, a_0, \pi)$. Le résultat principal de [20], dans le cas où $\rho \simeq \rho^*$ (hypothèse levée ici) est de montrer que $N_\psi(s, \rho, a_0, \pi)$ est holomorphe pour tout $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et le premier but de cet article est de décrire l'image de cet opérateur. On montre que soit cet opérateur, calculé en un point $s =: s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ est identiquement 0 soit son image est une représentation irréductible. De plus on décrit alors cette image dans les cas où il y a des applications globales, c'est à dire le cas où s_0 est un demi-entier donc de la forme $(b_0 - 1)/2$ avec $b_0 \geq 2$ et $(\rho, a_0, b_0 - 2) \in Jord(\psi)$ (si $b_0 = 2$, il n'y a pas de condition). On a dans ce cas un résultat très précis : on note ψ^+ le morphisme analogue à ψ mais tel que $Jord(\psi^+)$ se déduit de $Jord(\psi)$ en remplaçant $(\rho, a_0, b_0 - 2)$ par (ρ, a_0, b_0) (si $b_0 = 2$ on ajoute (ρ, a_0, b_0)) ; à l'aide des paramètres de π comme représentation dans le paquet associé à ψ, on définit des paramètres pour le paquet associé à ψ^+ et on note π^+ la représentation du paquet associé à ψ^+ ; elle peut être nulle. Et on montre l'égalité

$$Im\, N_\psi(s, \rho, a_0, \pi) = \pi^+$$

ce qui veut dire que l'image de l'opérateur est identiquement 0 exactement quand π^+ est nulle et sinon cette image est la représentation irréductible π^+. Bien sûr la construction des représentations à partir des paramètres est compliquée et le résultat n'est donc pas simple mais si on trouve ultérieurement une meillleure paramétrisation on pourra facilement retraduire ce résultat ; c'est donc à mon avis le meilleur possible. Quand les articles d'Arthur seront complètement disponibles, on pourra calculer explicitement le caractère associée à cette représentation et intervenant dans les formules de multiplicité.
Dans le texte on généralise en remplaçant $St(\rho, a_0)$ par une composante en la place p-adique fixée d'une représentation cuspidale autoduale d'un groupe GL et on considère aussi la généralisation des paquets d'Arthur de façon à couvrir le cas où la seule hypothèse sur π est d'être une composante locale d'une forme automorphe de carré intégrable ; le point ici est d'éviter l'utilisation de la conjecture de Ramanujan et donc de considérer certaines représentations non unitaires de $W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$.
Pour avoir des applications globales, on traite aussi le cas des places archimédiennes dans des cas très particuliers : on se limite à $F = \mathbb{R}$ et surtout on met l'hypothèse forte que π a de la cohomologie pour un bon système de coefficient et que le caractère infinitésimal de l'induite $\rho|\,|^{s_0} \times \pi$ est entier régulier, c'est surtout régulier qui compte. On démontre

alors le même résultat que ci-dessus, à savoir que l'opérateur normalisé est holomorphe en $s = s_0$ et que son image est une représentation irréductible explicite, en termes de paramètre de Langlands. Ce sont les hypothèses qui simplifient le résultat.
On termine l'article en décrivant les points de non holomorphie des séries d'Eisenstein dans le cadre suivant. Le corps de base est un corps de nombres k (totalement réel) et on suppose que G est défini sur k. On considère H un groupe de même type que G défini sur k. On fixe P un sous-groupe parabolique maximal de H, défini sur k, et on suppose que les sous-groupes de Levi de P sont isomorphes à $GL(d) \times G$ (éventuellement, ici, G peut être le groupe trivial). On fixe π_0 une représentation de carré intégrable irréductible de G et τ une représentation cuspidale irréductible et unitaire de $GL(d)$. Et on considère les séries d'Eisenstein de la forme $E_P^H(\tau| |^s \times \pi_0, f)$ où $s \in \mathbb{C}$. On sait qu'une telle série d'Eisenstein est holomorphe pour $Re\, s = 0$ et on s'intéresse au cas où $Re\, s > 0$; quitte à tordre τ par un caractère unitaire, on suppose en fait que $s \in \mathbb{R}$. On suppose que les résultats d'Arthur annoncés dans [2] sont disponibles pour π_0 ; ainsi à π_0 est associé un ensemble fini de couples (ρ, b) où ρ est une représentation cuspidale d'un groupe de type GL et b est un entier ; on note $Jord(\pi_0)$ cet ensemble. La propriété qui détermine uniquement cet ensemble est qu'en notant $Speh(\rho, b)$ la représentation du GL convenable dans l'espace des résidus :

$$Speh(\rho,b) = \left(\Big(\prod_{i \in [1,b[} (s_i - s_{i+1}) \Big) E(\rho| |^{(b-1)/2+s_1} \times \cdots \times \rho| |^{-(b-1)/2+s_b}, s_1, \cdots, s_b) \right)_{s_1=0,\cdots,s_b=0}$$

la représentation $\pi_0^{GL} :== \times_{(\rho,b)\in Jord(\pi_0)} Speh(\rho, b)$ et la représentations π ont leurs composantes locales non ramifiées qui se correspondent presque partout via la correspondance non ramifiée de Langlands. On définit l'analogue global de $r(s, \rho, a_0, \psi)$ en posant

$$r(s, \tau, \pi_0^{GL}) := \frac{L(\tau \times \pi_0^{GL}, s)}{L(\tau \times \pi_0^{GL}, s+1)} \frac{L(\tau, r_G, 2s)}{L(\tau, r_G, 2s+1)};$$

ici tous les facteurs comptent. On fixe un réel positif s_0 et on suppose que le caractère infinitésimal de $\tau| |^{s_0} \times \pi_0$ est entier et régulier et que π_0 a de la cohomologie à l'infini. Grâce à [19] 1.2.2 et 4.4.4 (i) (avec le résultat d'holomorphie de [20] complété ici), on sait que les séries d'Eisenstein $E_P^H(\tau| |^s \times \pi)$ sont holomorphe en $s = s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ sauf éventuellement si $r(s, \tau, \pi_0^{GL})$ a un pôle nécessairement d'ordre 1 en $s = s_0$; ceci s'explicite en :

soit $s_0 = 1/2$ et $L(\tau, r_{G,d}, 2s)$ a un pôle en $s = 1/2$, soit s_0 est un demi-entier supérieur ou égal à 1 avec $(\tau, 2s_0 - 2) \in Jord(\pi_0)$ et, dans les 2 cas, pour tout $(\rho, b) \in Jord(\pi_0)$ avec $b = 2s_0 - 1$, $L(\tau \times \rho, 1/2) \neq 0$.

On donne dans cet article des conditions nécessaires et suffisantes pour que s_0 soit un pôle On exprime ces conditions ainsi : on a globalement la représentation d'un groupe linéaire convenable $\pi_0^{GL} := \times_{(\rho,b)\in Jord(\pi_0)} Speh(\rho, b)$; en toute place v, avec la paramétrisation de Langlands étendu en une paramétrisation d'Arthur, on a un morphisme $\psi_{0,v}$ qui correspond à la composante locale en la place v de la représentation π_0^{GL}. On considère la composante locale en toute place v de π_0, cela joue le rôle de la représentation π dans ce qui précède ; l'analogue de $St(\rho, a_0)$ est (avec la généralisation déjà annoncée) la composante locale de τ_0 ; comme expliqué ci-dessus, pour s_0 vérifiant les conditions nécessaires pour avoir non holomorphie des séries d'Eisenstein, on a défini en toute place v une représentation $\pi_{0,v}^+$ qui éventuellement peut être nulle (sauf aux places archimédiennes où la non nullité est assurée avec l'hypothèse mise). On pose formellement $\pi_0^+ = \otimes_v \pi_{0,v}^+$. On suppose aussi que l'on sait a priori que la représentation π_0^+ si elle est non nulle intervient avec multiplicité au plus 1 dans le spectre discret. On montre alors le théorème suivant :

Les séries d'Eisenstein $E(\tau| |^s \times \pi_0, f)$ ont un pôle en s_0 si et seulement si les conditions nécessaires ci-dessus sont satisfaites et π_0^+ est non nulle et alors

$$\left((s-s_0)E(\tau| |^s \times \pi_0, f)\right)_{s=s_0} = \pi_0^+;$$

Ceci revient à dire que l'existence d'un pôle est équivalent à ce que l'opérateur d'entrelacement global :

$$\tau| |^s \times \pi_0 \to \tau^* | |^{-s} \times \pi_0$$

ait un pôle. Cela ne veut pas dire que les autres opérateurs d'entrelacement n'ont pas de pôle mais cela dit que s'ils ont des pôles celui écrit en a aussi. Evidemment ce sont les hypothèses de régularité du caractère infinitésimal prises qui permettent un résultat si simple.
L'hypothèse de multiplicité 1 est une hypothèse raisonable car elle résulte de la formule de multiplicité globale d'Arthur et des formules de multiplicité 1 locale ; celles-ci sont démontrés aux places p-adiques ([18]) dès qu'on les a pour les paquets de séries discrètes (résultat annoncé par Arthur) et aux places archimédiennes elles résultent de [1] si on sait que π_0^+ a de la cohomologie pour un bon système de coefficient et si on sait que les paquets d'Adams-Johnson de [1] sont bien ceux d'Arthur.
On montre aussi que si π' est une représentation automorphe irréductible de carré intégrable qui n'est pas cuspidale, et si τ est une représentation cuspidal unitaire, $s_0 \in 1/2\mathbb{N}$ sont tel que les termes constants de π' pour un parabolique maximal de la forme $GL(d_\tau) \times G'$ (G' un groupe de même type que G convenable) ont une projection non nulle sur l'espace de $\tau| |^{-s_0}$ vu comme représentation automorphe cuspidale du facteur $GL(d_\tau)$, alors $\pi' \simeq \pi_0^+$ pour un bon choix de π_0. On discute en 7.4 pourquoi on s'est approché sans l'atteindre de l'objectif de [19], à savoir donner des conditions nécessaires et suffisantes pour décrire les représentations automorphes de carré intégrable non cuspidales ; en fait on écrit en 7.4 de telles conditions nécessaires et suffisantes mais l'une de ces conditions me semble redondante et devrait disparaître quand on aura explicité les formules de multiplicité d'Arthur.

Les applications que l'on peut espérer de ces résultats concernent la cohomologie des représentations automorphes ; pour cela, il faut utiliser la description faite par Franke en [4] des formes automorphes comme dérivées de série d'Eisenstein à partir de représentations de carré intégrable et essayer de généraliser la première partie de [5]. Sans travail supplémentaire, on ne peut espérer de description explicite comme ce qui a été fait dans certaines situations en particulier récemment en [6], [7], [8] et [9].

Ce travail a été exposé lors de la période spéciale se déroulant à l'Institut Erwin Schrödinger de Vienne début 2009 et je remercie l'ESI pour son hospitalité, les organisateurs de cette période, G. Henniart, G. Muic et J. Schwermer ainsi que les auditeurs et en particulier H. Grobner pour ses remarques sur le cas archimédien.

Table des matières

2 Notations et description des représentations π^+, cas local p-adique

2.1 Notations générales

On se place sur un corps p-adique, F. On paramétrise les représentations irréductibles de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ par un triplet (ρ, a, b) formée d'une représentation irréductible de W_F et de 2 entiers qui paramétrisent chacun une représentation irréductible de $SL(2,\mathbb{C})$. On note m_G^* la dimension de la représentation naturelle du L-groupe de G ; cette notation servira peu.

2.1.1 Bonne Parité

On fixe G un groupe classique défini sur F ; ici on se limite aux groupes orthgonaux ou symplectique. On dit qu'une représentation irréductible de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ se factorise par un groupe de même type que le groupe dual de G, si elle est autoduale et symplectique si G est un groupe orthogonal impair et orthogonal sinon. On dit alors que cette représentation a bonne parité. Soit ψ une représentation semi-simple de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ de dimension finie dont toutes les sous-représentations irréductibles sont de bonne parité, on dit alors que ψ est de bonne parité.

2.1.2 Paramètre géométrique des paquets d'Arthur et $Jord(\psi)$

Les paramètres géométriques des paquets d'Arthur sont des représentations irréductibles de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ que l'on suppose semi-simple, se factorisant par le groupe dual de G. On suppose que ces représentations sont continues quand on les restreint à W_F et algébriques sur les 2 copies de $SL(2,\mathbb{C})$. En général, c'est le cas le plus difficile, on suppose ces représentations unitaires quand on les restreint à W_F ; on dit simplement unitaire. On fera les généralisations nécessaires pour éviter la conjecture de Ramanujan en 5.1. En 2.2 on expliquera comment on associe à un tel morphisme un ensemble fini de représentations lisses irréductibles de G. On note $Jord(\psi)$ l'ensemble des sous-représentations irréductibles incluses dans ψ en tenant compte des multiplicités. Avec les notations déjà introduites, on a donc :

$$\sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} ab\dim\rho = m_G^*$$

2.1.3 Correspondance de Langlands pour les groupes GL

On utilisera librement la correspondance de Langlands pour GL démontrée par Harris-Taylor en [10] et par Henniart en [11]. Cela permet d'identifier toute représentation continue irréductible de dimension finie d de W_F, notée ρ, à une représentation cuspidale irréductible de $GL(d,F)$, notée encore ρ. Soit ψ comme ci-dessus, on note $\pi^{GL}(\psi)$ la représentation induite

$$\pi^{GL}(\psi) = \times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} Speh(St(\rho,a),b),$$

où $St(\rho,a)$ est la représentation de Steinberg, unique sous-représentation irréductible de l'induite $\rho|\,|^{(a-1)/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{-(a-1)/2}$ et où $Speh(St(\rho,a),b)$ est l'unique quotient irréductible de l'induite $St(\rho,a)|\,|^{(b-1)/2} \times \cdots \times St(\rho,a)|\,|^{-(b-1)/2}$. Si ψ se factorise par le groupe dual de G, cette représentation $\pi^{GL}(\psi)$ est, à fortiori, autoduale.
Soit ρ une représentation cuspidale d'un groupe $GL(d,F)$ (ce qui définit d) et soit $[x,y]$ un segment, c'est-à-dire $x,y \in \mathbb{R}$ avec $x-y \in \mathbb{Z}$. Dans le texte x,y seront toujours des

demi-entiers mais cela ne sert pas ici. On note $< x, \cdots, y >_\rho$ l'unique sous-représentation irréductible de $GL(d|x-y|+1, F)$ incluse dans l'induite $\rho| |^x \times \cdots \times \rho| |^y$. Cette représentation est une série discrète tordue si $x-y \geq 0$ et est une représentation de Speh si $x-y \leq 0$. On généralise parfois cette notation dans la situation suivante : soit une matrice dont les lignes et les colonnes sont des segments mais de croissance opposée ; en d'autres termes soit x, y, z tel que $[x, y]$ soit un segment et $[x, z]$ soit aussi un segment mais avec $(x-y)(x-z) \leq 0$ et on considère la matrice

$$A := \begin{matrix} x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z & \cdots & z+y-x \end{matrix}$$

et la représentation $< A >_\rho$ est alors l'unique sous-représentation irréductible incluse dans l'induite $< x, y >_\rho \times \cdots \times < z, z+y-x >_\rho$. La possibilité de définir ainsi une unique représentation irréductible résulte des résultats de Bernstein-Zelevinsky et Zelevinsky que nous utilisons librement dans l'article.

2.1.4 Opérateurs d'entrelacement

Soit τ une représentation, en général irréductible mais ce n'est pas indispensable pour cette définition, d'un groupe $GL(d_\tau)$ et soit π une représentation irréductible de G. Pour $s \in \mathbb{C}$, on considère la représentation induite $\tau| |^s \times \pi$ et l'opérateur d'entrelacement standard :

$$M(s, \tau, \pi) : \tau| |^s \times \pi \to \tau^*| |^{-s} \times \pi.$$

Supposons que π est dans un paquet d'Arthur associé à une représentation ψ de $W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ (cf. 2.2 et 5.1) et on reprend la notation $r(s, \tau, \psi)$ de l'introduction :

$$r(s, \tau, \psi) = \frac{L(\tau \times \pi^{GL}(\psi), s)}{L(\tau \times \pi^{GL}(\psi), s+1)} \frac{L(\tau, r_{G,d_\tau}, 2s)}{L(\tau, r_{G,d_\tau}, 2s+1)}$$

r_{G,d_τ} a été défini dans l'introduction et ne compte pas quand on est dans le cas local, le facteur correspondant n'a ni zéro ni pôle pour τ tempérée et $Re\, s > 0$. On pose

$$N_\psi(s, \tau, \pi) := r(s, \tau, \pi)^{-1} M(s, \tau, \pi).$$

Quand τ est une représentation de Steinberg, c'est-à-dire de la forme $St(\rho, a)$, on pose

$$N_\psi(s, St(\rho, a), \pi) =: N_\psi(s, \rho, a, \pi).$$

2.2 Rappel sur les paquets d'Arthur

On fixe ψ une représentation unitaire de $W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ à valeurs dans $GL(m_G^*, \mathbb{C})$ comme dans 2.1.2, d'où aussi $\pi^{GL}(\psi)$ comme dans 2.1.3.
Supposons momentanément que G est quasidéployé. Arthur a annoncé dans le dernier chapitre de [2] qu'il existe un ensemble fini de représentation irréductible de G, noté $\Pi(\psi)$ uniquement déterminé par le fait que pour tout $\pi \in \Pi(\psi)$ il existe une nombre complexe non nul a_π tel que la distribution $\sum_{\pi \in \Pi(\psi)} a_\pi tr\, \pi$ se transfère, via l'endoscopie la θ-trace de $\pi^{GL}(\psi)$. Ne supposons plus G quasidéployé, on a alors une définition de $\Pi(\psi)$ en utilisant le transfert à la forme quasidéployée du groupe.
En admettant ce résultat d'Arthur pour les morphismes ψ triviaux sur la 2e copie de $SL(2, \mathbb{C})$ et tel que $Jord(\psi)$ soit sans multiplicité, ce sont ceux qui paramétrisent les paquets de séries discrètes, on a retrouvé le résultat général d'Arthur en [17] ; ce qui nous

importe est que dans ces références, on a donné une construction combinatoire des éléments de $\Pi(\psi)$ à partir des séries discrètes. C'est cette description que l'on va rappeler.
Cette description est simple dans le cas où la restriction de ψ à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ est sans multiplicité. Dans ce cas, on a montré en [17] que $\Pi(\psi)$ est en bijection avec les couples de fonctions $(\underline{t}, \underline{\eta})$ de $Jord(\psi)$ à valeurs dans $\mathbb{N} \times \{\pm 1\}$ satisfaisant à

$$\forall(\rho,a,b) \in Jord(\psi), \underline{t}(\rho,a,b) \in [0,[inf(a,b)/2]]$$

$$\text{si } \underline{t}(\rho,a,b) = inf(a,b)/2, \text{ alors } \underline{\eta}(\rho,a,b) = +; \tag{1}$$

$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} \underline{\eta}(\rho,a,b)^{inf(a,b)}(-1)^{[inf(a,b)/2]+\underline{t}(\rho,a,b)} = \epsilon_G, \tag{2}$$

où ϵ_G vaut $+$ quand G est quasidéployé. En général, il vaut mieux définir ϵ_G comme valant l'invariant de Hasse de la forme bilinéaire servant à définir G ; comme le même groupe peut correspondre à 2 formes bilinéaires avec des invariants de Hasse différents, dans ces cas, la paramétrisation dépend de la forme bilinéaire et non du groupe et la notation est incorrecte.
Dans le cas particulier, où en plus des hypothèses déjà faites, pour tout $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$, on a $a \geq b$, la paramétrisation que nous avons décrites est particulièrement agréable car elle donne directement les paramètres de Langlands des représentations cherchées. Si à l'inverse pour tout $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$, on a $b \geq a$, la paramétrisation donnée est une généralisation de la paramétrisation de Zelevinsky. En général, notre paramétrisation est une interpolation des paramétrisations de Langlands et de Zelevinsky adaptée à ψ et il n'y a pas de formule simple pour retrouver la paramétrisation de Langlands. On n'aura pas besoin du détail précis de la construction ici, ils sont résumés en [20] 2.2.

Dans cet article, on a besoin d'utiliser précisément le passage du cas général à ce cas particulier. On note ψ_{bp} la somme des sous-représentations irréductibles de ψ ayant bonne parité (cf. 2.1.1) et ψ_{mp} la somme des autres. Comme ψ se factorise par le groupe dual de G, on peut découper (de façon non unique) ψ_{mp} en la somme directe de 2 sous-représentations $\psi_{1/2,mp} \oplus \psi_{-1/2,mp}$ où $\psi_{-1/2,mp} \simeq \psi^*_{1/2,mp}$. A $\psi_{1/2,mp}$ on associe comme précédemment une représentation de $GL(d_{1/2,mp}, F)$ (où $d_{1/2,mp}$ est la dimension de la représentation $\psi_{1/2,mp}$) ; on note $\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})$ cette représentation. On va construire ci-dessous $\Pi(\psi_{bp})$ l'ensemble des représentations associées au morphisme ψ_{bp} et on a montré en [18] 3.2 que pour tout $\pi' \in \Pi(\psi_{bp})$ la représentation induite $\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi'$ de G est irréductible et que $\Pi(\psi)$ est précisément l'ensemble de toutes ces représentations, l'induction définit donc une bijection de $\Pi(\psi_{bp})$ sur $\Pi(\psi)$. Il reste à rappeler la description de $\Pi(\psi_{bp})$. Pour cela on suit [20] 2.8.
Pour simplifier les notations on suppose que $\psi = \psi_{bp}$. La paramétrisation de $\Pi(\psi)$ se fait ici encore à l'aide des couples $\underline{t}, \underline{\eta}$ vérifiant les mêmes hypothèses que ci-dessus mais définis sur l'ensemble $Jord(\psi)$ vu comme ensemble avec répétition (correspondant à la multiplicité) mais il faut en plus un ordre total sur $Jord(\psi)$. Evidemment $\Pi(\psi)$ comme ensemble ne dépend pas du choix de l'ordre mais la paramétrisation que nous ne donnons en dépend en général.
On fixe donc un ordre total sur $Jord(\psi)$ et on fait en plus un choix de signe pour tout $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ tel que $a = b$; pour avoir des notations plus simples on inclut ce choix de signe dans les notations en remplaçant les triplets $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ par des quadruplets (ρ,A,B,ζ) où le passage se fait par les égalités :

$$A = (a+b)/2 - 1; B = |(a-b)|/2; \zeta(a-b) \geq 0.$$

L'ordre total sur $Jord(\psi)$ doit vérifier la propriété suivante :

$\mathcal{P}$: $\forall (\rho, A, B, \zeta), (\rho', A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$, les propriétés $\rho \simeq \rho'$, $\zeta = \zeta'$, $A > A'$ et $B > B'$ entraînent $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho', A', B', \zeta')$.

En particulier l'ordre sépare les éléments de $Jord(\psi)$ qui sont égaux. Une fois l'ordre fixé, pour G' un groupe de même type que G mais de rang plus grand et pour ψ' un morphisme analogue à ψ mais relativement à G', on dit que ψ' domine ψ s'il existe une fonction $\underline{T} : Jord(\psi) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ respectant l'ordre sur $Jord(\psi)$ et tel que

$$Jord(\psi') = \{(\rho, A + \underline{T}(\rho, A, B, \zeta), B + \underline{T}(\rho, A, B, \zeta), \zeta); (\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)\}. \quad (3)$$

Evidemment quand ψ' est connu on trouve la fonction $\underline{T}$, en posant $\underline{T}(\rho, A, B, \zeta) = A' - A$ pour A' l'élément du quadruplet (ρ', A', B', ζ') situé dans $Jord(\psi')$ à la même place que (ρ, A, B, ζ) dans $Jord(\psi)$ et nécessairement pour ce quadruplet $\rho' = \rho, \zeta' = \zeta$ et $B' = B + A' - A$.
Pour avoir une notation plus expressive, on note plutôt $\psi_>$ un morphisme dominant ψ. Pour construire $\Pi(\psi)$, on fixe $\psi_{>>}$ un morphisme, de bonne parité, dominant ψ et tel que la restriction de $\psi_{>>}$ à W_F fois la diagonale de $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ soit sans multiplicité. Ceci est possible car on a supposé ψ de bonne parité. On sait donc construire $\Pi(\psi_{>>})$. On rappelle une notation bien commode ; on fixe ρ une représentation cuspidale autoduale d'un $GL(d)$ et τ une représentation d'un groupe classique, H, ainsi que x un demi-entier (on n'utilisera que ce cas). Si l'indice de Witt de la forme définissant H est inférieur à d strictement on pose $Jac_{\rho| |^x}\tau = 0$ et sinon, on fixe un sous-groupe parabolique maximal de H ayant ses sous-groupes de Levi isomorphe à $GL(d) \times H'$ pour H' un groupe classique de même type que H et on note $Jac_{\rho| |^x}\tau$ l'élément du groupe de Grothendieck des représentations lisses irréductibles de H' tel que dans le groupe de Grothendieck des représentations lisses irréductibles de $GL(d) \times H'$, le module de Jacquet de τ le long du radical unipotent du parabolique fixé soit de la forme $\rho| |^x \otimes Jac_{\rho| |^x}\tau$ plus des éléments de la forme $\rho' \otimes \sigma'$ avec $\rho' \not\simeq \rho| |^x$. Quand ρ est fixé, on peut l'oublier de la notation. Fixons $\underline{t}, \underline{\eta}$ vérifiant (1) et (2) ci-dessus ; on les transporte en des fonctions sur $Jord(\psi_{>>})$ via l'isomorphisme ordonné de $Jord(\psi_{>>})$ sur $Jord(\psi)$. On a donc défini la représentation irréductible $\pi(\psi_{>>}, \underline{t}, \underline{\eta})$. On a démontré en [20] 2.8 que la représentation

$$\circ_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} \circ_{\ell \in [\underline{T}(\rho,A,B,\zeta),1]} Jac_{\zeta(A+\ell)} \circ \cdots \circ Jac_{\zeta(B+\ell)} \pi(\psi_{>>}, \underline{t}, \underline{\eta}) =: \pi(\psi, \underline{t}, \underline{\eta})$$

où les (ρ, A, B, ζ) sont pris dans l'ordre décroissant est un élément du groupe de Grothendieck de G qui est soit 0 soit une représentation irréductible. De plus pour $(\underline{t}', \underline{\eta}') \neq (\underline{t}, \underline{\eta})$ soit $\pi(\psi, \underline{t}, \underline{\eta}) = 0 = \pi(\psi, \underline{t}', \underline{\eta}')$ soit les 2 représentations sont inéquivalentes. Et on a montré en [20] 2.8 que $\Pi(\psi)$ est exactement l'ensemble des représentations $\pi(\psi, \underline{t}, \underline{\eta})$ obtenues ainsi.
Le seul défaut de cette construction est qu'il n'existe pas de critère simple pour distinguer la nullité ou la non nullité de $\pi(\psi, \underline{t}, \underline{\eta})$. Mais par contre on contrôle totalement les coefficients nécessaires (des signes) pour que la combinaison linéaire avec coefficients de ces représentations soit stable et se transfère en la θ-trace de $\pi^{GL}(\psi)$ pour une action totalement explicite de l'automorphisme θ.
Dans le texte on aura besoin de propriétés supplémentaires que l'on rappelera avec une référence quand nécessaire et les 2 plus importantes seront redémontrées dans la généralité qu'il nous faut en appendice.

2.3 Notations pour les modules de Jacquet et propriété

Dans le paragraphe précédent, on a introduit la notation $Jac_{\rho| |^x}$ abrégée parfois en Jac_x. On la généralise ainsi : pour ρ fixé et $x_1, \cdots, x_v$ un ensemble ordonné de nombres réels, on pose

$$Jac_{x_1,\cdots,x_v} = \circ_{i\in[v,1]} Jac_{x_i}.$$

On remarque que pour une représentation irréductible π, le fait que $Jac_{x_1,\cdots,x_v}\pi \neq 0$ est équivalent à ce qu'il existe une représentation σ d'un groupe de même type que G mais de rang plus petit avec une inclusion :

$$\pi \hookrightarrow \rho|\,|^{x_1} \times \cdots \times \rho|\,|^{x_v} \times \sigma, \qquad (*)$$

et on peut évidemment supposer σ irréductible. On le démontre à partir du cas $v = 1$ par réciprocité de Frobenius. On vérifie aussi que si x, y sont tels que $|x - y| > 1$, on a l'égalité $Jac_{x,y}\pi = Jac_{y,x}\pi$: pour cela on calcule le module de Jacquet pour un parabolique de Levi $GL(2d_\rho) \times G'$ où G' est un groupe de même type que G et on décompose le résultat dans le groupe de Grothendieck en une somme avec coefficients de représentations $\sigma \otimes \tau$. Ainsi $Jac_{x,y}$ est la somme avec les bons coefficients de τ qui interviennet avec σ qui ont dans leur module de Jacquet le terme $\rho|\,|^x \otimes \rho|\,|^y$. Il n'y a qu'un seul σ possible avec cette propriété et son module de Jacquet cuspidal est exactement la somme de ce terme avec le terme $\rho|\,|^y \otimes \rho|\,|^x$. D'où le résultat.

2.4 Le facteur de normalisation et ses pôles

On fixe ψ comme ci-dessus, ρ une représentation cuspidale unitaire autoduale d'un GL et a_0 un entier strictement positif et on a posé : $r(s, \rho, a_0, \psi) :=$

$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} \frac{L(St(\rho, a_0) \times St(\rho, a), s - (b-1)/2)}{L(St(\rho, a_0) \times St(\rho, a), s + (b+1)/2)} \times \frac{L(St(\rho, a_0), r_{G,ad_\rho}, 2s)}{L(St(\rho, a_0), r_{G,ad_\rho}, 2s+1)}.$$

Les facteurs L locaux qui interviennent ci-dessus sont bien connus ; par exemple, on sait depuis [12] page 445, (6) que pour σ, τ des représentations de carré intégrable d'un GL, le facteur $L(\sigma \times \tau, s)$ n'a pas de pôle pour $s \in \mathbb{R}_{>0}$. On en déduit, a fortiori, que les dénominateurs ci-dessus n'ont pas de pôles pour $s = s_0 > 0$ et qu'il en est de même de $L(St(\rho, a_0), r_{G,ad_\rho}, 2s)$. Ainsi l'ordre en $s = s_0$ de la fonction méromorphe $r(s, \rho, a_0, \psi)$ est la somme des ordres en $s = s_0$ des fonctions $L(St(\rho, a_0) \times St(\rho, a), s - (b-1)/2)$ quand (ρ, a, b) parcourt $Jord(\psi)$. Pour déterminer ces ordres, on utilise le calcul explicite de ces facteurs donné en [12] th. 8.2 : $L(St(\rho, a_0) \times St(\rho, a), s') = \times_{\ell\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]} L(\rho \times \rho, (a_0-1)/2 + \ell + s')$ si $a \geq a_0$ et une formule symétrique dans le cas inverse. Cela se récrit

$$L(St(\rho, a_0) \times St(\rho, a), s - (b-1)/2) = \times_{\ell\in[|(a-a_0)/2|,(a+a_0)/2-1]} L(\rho \times \rho, \ell + s - (b-1)/2).$$

Une telle fonction a donc au plus un pôle simple et elle en a un exactement quand $(b-1)/2 - s_0 \in [|(a-a_0)/2|, (a+a_0)/2 - 1]$. On pose $b_0 := 2s_0 + 1$ et on suppose comme précédemment que b_0 est un entier supérieur ou égal à 2 et on reprend les notations : $A = (a+b)/2 - 1, B = |(a-b)|/2$, ζ est un signe tel que $\zeta(a-b) \geq 0$ et de même $A_0 = (a_0+b_0)/2 - 1, B_0 = |(a_0 - b_0)$ et un signe tel que $\zeta_0(a_0 - b_0) \geq 0$ avec $\zeta_0 = +$ si $a_0 = b_0$. On a donc un pôle si les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$(b-b_0)/2 \geq (a-a_0)/2; (b-b_0)/2 \geq (a_0-a)/2; (b-b_0)/2 \leq (a+a_0)/2 - 1.$$

Ou encore avec les notations introduites :

$$\zeta_0 B_0 - \zeta B \geq 0; A \geq A_0; \zeta B + A_0 \geq 0.$$

On a alors le tableau suivant qui dit quand (ρ, a, b) participe aux pôles de la fonction $r(s, \rho, a_0, \psi)$ en $s = s_0$ (on rappelle que l'on a supposé que $\zeta_0 = +$ si $B_0 = 0$) :

$\zeta\backslash\zeta_0$	+	-
+	$B \leq B_0 \leq A_0 \leq A$	pas de pôle
-	$B \leq A_0 \leq A$	$B_0 \leq B \leq A_0 \leq A$

2.5 Paramètres de l'image des opérateurs d'entrelacement dans le cas de bonne parité

On fixe ρ, a_0, b_0 un triplet qui paramétrise donc une représentation irréductible de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$; on suppose que cette représentation est autoduale à valeurs dans un groupe de même type (orthogonal ou symplectique) que le type du groupe dual de G ; c'est-à-dire qu'elle est de bonne parité. On pose $A_0 = (a_0+b_0)/2-1$ et $B_0 = |a_0-b_0|/2$; on note ζ_0 le signe de a_0-b_0 sauf si ce nombre est 0 où ζ_0 vaut alors $+$ par définition. On considère aussi le triplet (ρ, a_0, b_0-2) qui n'est défini que si $b_0>2$ et on lui associe aussi $A_0' := (a_0+b_0-2)/2-1 = A_0-1$, $B_0' = |(a_0-b_0+2)/2|$ qui vaut $B_0+\zeta_0$ sauf si $a_0 = b_0-1$ où l'on a $B_0 = B_0' = 1/2$. On note ζ_0' le signe de a_0-b_0+2 et si $a_0 = b_0-2$, on pose $\zeta_0' = -$; on a donc $\zeta_0' = \zeta_0$ sauf dans le cas particulier où $B_0 = B_0' = 1/2$ avec $\zeta_0 = -$ où $\zeta_0' = +$. Si $b_0 = 2$, on dit que $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ n'existe pas.
On fixe un morphisme ψ comme dans les paragraphes précédents. On suppose que ψ est de bonne parité. On suppose de plus que si $b_0>2$ alors ψ contient la sous-représentation irréductible associée au triplet (ρ, a_0, b_0-2). Dans tous les cas, on note ψ^+ le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant une copie de (ρ, a_0, b_0-2) (si il y en a une) par une copie de (ρ, a_0, b_0) ou en ajoutant simplement $(\rho, a_0, 2)$ si $b_0 = 2$.
En termes de quadruplet, l'hypothèse sur ψ est que $Jord(\psi)$ contient $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ si ce quadruplet est défini.
On veut définir a priori un élément π^+ dans le paquet associé à ψ^+ et montrer que l'image de $N_\psi(s,\rho,a_0)_{s=s_0}$ est exactement π^+ c'est à dire est nulle si π^+ est nulle et est réduite à π^+ sinon. Le guide pour faire cela est que l'on veut une inclusion

$$\pi^+ \hookrightarrow St(\rho, a_0)|\,|^{-s_0} \times \pi. \tag{1}$$

Dans certains cas, cela détermine uniquement les paramètres de π^+. C'est ce qui se produit dans le cas où la restriction de ψ^+ et la restriction de ψ à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ sont sans multiplicité. On retrouvera cela dans la preuve de 3.2.2. Un cas est complètement évident et on va donc le donner dès maintenant ; il s'agit du cas où $\zeta_0 = +$ (c'est-à-dire $a_0 \geq b_0$) et où la restriction de ψ^+ à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ est sans multiplicité. On vérifie alors que $(\rho, A_0', B_0'; \zeta_0') = (\rho, A_0-1, B_0+1, \zeta_0)$ et la restriction de ψ à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ est aussi sans multiplicité. Notons $\underline{t}, \underline{\eta}$ les paramètres de π dans son paquet $\Pi(\psi)$ et $\underline{t}^+, \underline{\eta}^+$ ceux de π^+ dans $\Pi(\psi^+)$. D'après (1) et [17] 4.2, $\underline{t}, \underline{\eta}$ et $\underline{t}^+, \underline{\eta}^+$ coïncident sur $Jord(\psi) \cap Jord(\psi^+)$ et l'on a

$$\underline{t}^+(\rho, A_0, B_0, \zeta_0) = \underline{t}(\rho, A_0', B_0', \zeta_0') + 1 \text{ (resp. } = 1);$$

$$\underline{\eta}^+(\rho, A_0, B_0, \zeta_0) = \underline{\eta}(\rho, A_0', B_0', \zeta_0') \text{ (resp. } = + \text{)}$$

si $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ existe (resp. n'existe pas).
Le cas où $\zeta_0 = -$ même avec l'hypothèse que la restriction de ψ^+ à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ est sans multiplicité est un peu plus compliqué ; en effet, l'hypothèse n'entraîne pas que la restriction de ψ à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ soit aussi sans multiplicité. Mais si on ajoute aussi cette hypothèse, l'inclusion (1) et [17] 4.4 forcent les formules

$$\underline{t}^+(\rho, A_0, B_0, \zeta_0) = \underline{t}(\rho, A_0', B_0', \zeta_0') \text{ (resp. } = 0);$$

$$\underline{\eta}^+(\rho, A_0, B_0, \zeta_0) = \underline{\eta}(\rho, A_0', B_0', \zeta_0') \text{ (resp. } = + \text{)}$$

si $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ existe (resp. n'existe pas).
On va maintenant donner a priori la formule pour les paramètres de π^+ en généralisant les cas ci-dessus. Auparavant il faut régler le problème du choix d'un ordre sur $Jord(\psi^+)$ qui

n'apparaissait pas ci-dessus à cause des hypothèses simplificatrices. Comme on veut des formules analogues à celles données ci-dessus, l'idée la plus simple, qui est celle que nous prendrons, est de mettre sur $Jord(\psi^+)$ l'ordre tel que $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ prenne la place de $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ dans l'ordre sur $Jord(\psi)$. Mais on doit garder la propriété donnée en 2.2 ce qui nécessite d'imposer à l'ordre sur $Jord(\psi)$ certaines propriétés ; si $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ n'existe pas, on peut faire le choix que l'on veut à condition de respecter cette propriété. On a aussi besoin de mettre des conditions sur les ordres pour pouvoir faire les démonstrations et je ne sais pas si ces conditions sont nécessaires, en tout cas, elles compliquent la situation.
A la fin du paragraphe suivant on donne une famille d'ordre qui vérifie toutes les conditions voulues mais auparavant on met les conditions minimales pour savoir décrire l'image de $N_\psi(s, \rho, a_0, \pi)$ en $s = (b_0-1)/2$ en termes de paramètres. Cela est technique mais laisse plus de flexibilité que de n'accepter que les ordres ayant les propriétés de la fin du paragraphe.

2.5.1 Propriétés de l'ordre sur $Jord(\psi)$ et sur $Jord(\psi^+)$

On garde les notations précédentes. On considère des ordres sur $Jord(\psi)$ et $Jord(\psi^+)$ vérifiant $\mathcal{P}$ de 2.2 et on demande en plus les conditions ci-dessous :
l'ordre sur $Jord(\psi)$ et celui sur $Jord(\psi^+)$ sont tels que les quadruplets de $Jord(\psi)$ donnant des pôles à la fonction $r(s, \rho, a_0, \psi)$ en $s = (b_0 - 1)/2$ (cf. 2.4), sont plus grands que $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ (si cet élément existe) dans $Jord(\psi)$ et que $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ dans $Jord(\psi^+)$ et plus grand que les quadruplets (ρ, A', B', ζ') avec $A' \leq A_0'$ dans $Jord(\psi)$ et dans $Jord(\psi^+)$.
Avec des symboles cela se traduit par :

$(\mathcal{P})_p$: pour tout (ρ, A, B, ζ) contribuant aux pôles de $r(s, \rho, a_0, \psi)$ en $s = (b_0 - 1)/2$, on a dans $Jord(\psi)$ (resp. $Jord(\psi^+)$), $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ (resp. $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$).
pour tout $(\rho, A, B, \zeta), (\rho, A', B', \zeta')$ dans $Jord(\psi) \setminus \{(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')\}$, tels que $A < A_0$ et (ρ, A', B', ζ') contribue aux pôles de $r(s, \rho, a_0, \psi)$ en $s = (b_0-1)/2$ (en particulier $A' \geq A_0$), on a $(\rho, A, B, \zeta) < (\rho, A', B', \zeta')$.

La deuxième partie de $\mathcal{P}_p$ a la conséquence suivante : notons $(\rho, A_1, B_1, \zeta_1)$ le plus petit élément de l'ensemble des quadruplets fournissant des pôles à $r(s, \rho, a_0, \psi)$ en $s = (b_0-1)/2$ (quand cet ensemble est non vide), alors tout $(\rho, A, B, \zeta) \geq (\rho, A_1, B_1, \zeta_1)$ vérifie $A \geq A_0$.

On impose aussi la condition suivante dans le cas exceptionnel :
supposons que (ρ, a_0, b_0) est tel que $b_0 = a_0 + 1$, c'est-à-dire $B_0 = 1/2$ et $\zeta_0' = + = -\zeta_0$; ici on impose aux ordres d'être tels que $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ et $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ sont les éléments minimaux. Si $b_0 = 2$ et $a_0 = 1$, on impose que $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ soit le plus petit élément de $Jord(\psi^+)$.

On a une condition propre au cas $\zeta_0 = +$ qui est un peu plus difficile que le cas $\zeta_0 = -$:
(0) supposons que $\zeta_0 = +$; soit $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ différent de $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ si cet élément existe. On suppose que $A < A_0$ et $\zeta = \zeta_0$, alors si $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ dans $Jord(\psi^+)$ ou à $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ dans $Jord(\psi)$, on a $B > B_0 + 1$. (cette propriété ne servira que dans 3.2.2)

Comme on veut que $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ dans $Jord(\psi^+)$ si et seulement si $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ dans $Jord(\psi)$, il faut avoir des conditions telles que $\mathcal{P}$ soit respecté. Ceci impose des conditions aux limites ; on suppose que l'on est pas dans le cas exceptionnel déjà réglé par la condition forte ci-dessus et on explique ce que l'on entend par conditions aux limites : soit (ρ, A, B, ζ) tel que $\zeta = \zeta_0 = \zeta_0'$. Par exemple si $A = A_0$,

(ρ, A, B, ζ) peut être plus petit ou plus grand que $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ et le signe de $B - B_0$ n'intervient pas alors que l'on a $A > A_0 - 1 = A_0'$ et si $B > B_0 + \zeta_0 = B_0'$ il faut nécessairement $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0', B_0', \zeta_0)$ dans $Jord(\psi)$ donc on veut aussi l'inégalité $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ dans $Jord(\psi^+)$. Il y a d'autres conditions du même ordre, on les écrit toutes ci-dessus, où on a fixé (ρ, A, B, ζ) avec $\zeta = \zeta_0 = \zeta_0'$:
(1) si $A = A_0 = A_0' - 1$ et $B > B_0' = B_0 + \zeta_0$ alors $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ dans $Jord(\psi^+)$
(2) si $A = A_0' = A_0 - 1$ et si $B < B_0$ alors $(\rho, A, B, \zeta) < (\rho, A_0', B_0', \zeta_0)$ dans $Jord(\psi)$
(3) si $B = B_0 = B_0' - \zeta_0$: si $\zeta_0 = +$ et si $A < A_0' = A_0 - 1$, alors $(\rho, A, B, \zeta) < (\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ dans $Jord(\psi^+)$; si $\zeta_0 = -$ et si $A \geq A_0 = A_0' + 1$ alors $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ dans $Jord(\psi^+)$
(4) si $B = B_0' = B_0 + \zeta_0$: si $\zeta_0 = +$ et si $A > A_0$ alors $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0', B_0', \zeta_0)$ dans $Jord(\psi)$; si $\zeta_0 = -$ et si $A < A_0$ alors $(\rho, A, B, \zeta) < (\rho, A_0', B_0', \zeta_0)$ dans $Jord(\psi)$.

Fixons un ordre sur $Jord(\psi)$ en supposant que $b_0 > 2$; on déduit un ordre sur $Jord(\psi^+)$ en demandant simplement que $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ prenne la place de $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$, c'est-à-dire pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi^+) \setminus \{(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ on a $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ dans $Jord(\psi^+)$ si et seulement si $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ dans $Jord(\psi)$.
Réciproquement, sans hypothèse sur b_0, ayant un ordre sur $Jord(\psi^+)$ on en déduit un ordre sur $Jord(\psi)$ en demandant que $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ prenne la place de $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$.
Montrons que les opérations que l'on a définies entre les ordres sur $Jord(\psi)$ et $Jord(\psi^+)$ conservent à la fois $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_p$ et les propriétés ci-dessus. Pour $\mathcal{P}_p$ c'est évident ainsi que pour (0) car elles sont symétriques en $Jord(\psi)$ et $Jord(\psi^+)$. Les autres conditions sont exactement faites pour que la propriété $\mathcal{P}$ soit respectée dans les cas limites.

Remarquons qu'il existe des ordres vérifiant les conditions ci-dessus : on prend un ordre sur $Jord(\psi^+) \setminus \{(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)\}$ tel que $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A', B', \zeta')$ dès que $A > A'$. On complète cet ordre en un ordre sur $Jord(\psi)$ en demandant que $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ si et seulement si $A > A_0' = A_0 - 1$. On le complète aussi en un ordre sur $Jord(\psi^+)$ en demandant que $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ si et seulement si $A \geq A_0$. Alors ces ordres se déduisent l'un de l'autre par la procédure expliquée : $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ prend la place de $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ ou lui cède sa place. Et $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_p$, (1) à (3) sont vérifiées. En imposant les conditions minimales, on a voulu garder un maximum de flexibilité.

2.5.2 Description des paramètres

On fixe un ordre sur $Jord(\psi)$ satisfaisant toutes les propriétés de 2.5.1 et on en déduit un ordre sur $Jord(\psi^+)$ comme expliqué en loc.cite ; si $b_0 = 2$, l'ordre sur $Jord(\psi^+)$ n'est pas uniquement déterminé par celui sur $Jord(\psi)$.
On a des paramètres $\underline{t}, \underline{\eta}$ pour définir π. On définit $\underline{t}^+, \underline{\eta}^+$ pour définir un élément (éventuellement 0) de $\Pi(\psi^+)$: sur tout $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi) - \{(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')\}$, $\underline{t}, \underline{\eta}$ coïncide avec $\underline{t}^+, \underline{\eta}^+$ et il faut donc définir ces applications sur $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$. On pose $t_0 := \underline{t}(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ et des notations analogues pour t_0^+, η_0 et η_0^+. On donne d'abord les définitions dans le cas où $b_0 > 2$ et $\zeta_0 = \zeta_0'$ ainsi que dans le cas où $b_0 = 2$, où on pose $t_0 = 0$ et $\eta_0 = +$ (ces nombres ne sont pas définis car $(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$ n'existe pas). Dans tous les cas, on a

$$\eta_0 = \eta_0^+$$

ζ_0	$+$	-
t_0^+	$t_0 + 1$	t_0

Il reste le cas exceptionnel $\zeta_0 = -$, $\zeta'_0 = +$, $B'_0 = B_0 = 1/2$ qui est désagréable dans notre paramétrisation. On a

$$\eta_0^+ = -\eta_0$$

et la valeur de t_0^+ dépend des valeurs de η_0 et t_0 par la formule :

η_0	$+$	-
t_0^+	t_0+1	t_0

Il y a 2 vérifications à faire pour s'assurer que ces définitions ont les propriétés de 2.2 : on doit vérifier que $t_0^+ \leq [inf(a_0,b_0)/2]$ et que

$$\eta_0^{inf(a_0,b_0-2)}(-1)^{[inf(a_0,b_0-2)/2]+t_0} = (\eta_0^+)^{inf(a_0,b_0)}(-1)^{[inf(a_0,b_0)/2]+t_0^+}.$$

On sait que $t_0 \leq [inf(a_0, b_0-2)/2]$ et on a $t_0 = t_0^+$ chaque fois que $a_0 < b_0$ et l'on a donc l'inégalité cherché sur t_0^+. Montrons l'égalité des signes, en notant ϵ_0 le membre de gauche et ϵ_0^+ celui de droite. On commence par le cas où soit $b_0 = 2$ soit $\zeta_0 = \zeta'_0$ et on a

ζ_0	$+$	-
ϵ_0	$\eta_0^{b_0-2}(-1)^{[b_0/2]-1+t_0}$	$\eta_0^{a_0}(-1)^{[a_0/2]+t_0}$
ϵ_0^+	$\eta_0^{b_0}(-1)^{[b_0/2]+t_0+1}$	$\eta_0^{a_0}(-1)^{[a_0/2]+t_0}$

et l'égalité cherchée. On fait maintenant le calcul quand $\zeta_0 = +$ et $\zeta'_0 = -$, c'est-à-dire $a_0 = b_0 - 1$:

η_0	$+$	-
ϵ_0	$(-1)^{[b_0/2]-1+t_0}$	$(-1)^{b_0-2}(-1)^{[b_0/2]-1+t_0}$
ϵ_0^+	$(-1)^{b_0-1}(-1)^{[(b_0-1)/2]+t_0+1}$	$(-1)^{[(b_0-1)/2]+t_0}$

Or on a l'égalité pour tout nombre entier b'

$$(-1)^{[b'/2]} = (-1)^{b'-1}(-1)^{[(b'-1)/2]}.$$

En reportant dans le tableau, avec $b' = b_0$ pour la 2e colonne et $b' = b_0+1$ pour la 3e colonne, on trouve l'égalité cherchée de ϵ_0 et ϵ_0^+.

Avec ces paramètres, on définit une représenation π^+ dans $\Pi(\psi^+)$ et il n'est évidemment pas clair que la représentation π^+ (et sa nullité éventuelle) ne dépende pas du choix de l'ordre mis sur $Jord(\psi)$ mais ce sera une conséquence de son identification avec l'image de $N_\psi(s,\rho,a_0,\pi)_{s=(b_0-1)/2}$.

3 Description de π^+ comme sous-module irréductible dans le cas holomorphe

Le cas où $ordre_{s=s_0} r(s,\rho,a_0,\psi) = 0$ est dit le cas holomorphe ; on a décrit les pôles et donc leur absence dans 2.4. Cela se traduit par :
si $\zeta_0 = +$, pour tout (ρ, A, B, ζ) soit $A > A_0$ soit $\zeta = +$ et $B > B_0$ soit $\zeta = -$ et $B > A_0$;
si $\zeta_0 = -$, pour tout (ρ, A, B, ζ) soit $\zeta = +$ soit $\zeta = -$ et soit $B > A_0$ soit $A < A_0$.

3.1 Etude de l'induite $St(\rho, a_0)| |^{-s_0} \times \pi$ dans le cas holomorphe

Supposons que le facteur de normalisation de 2.4 n'a pas de pôle en $s = s_0 = (b_0 - 1)/2$.

Remarque *Avec l'hypothèse faite, la représentation induite $St(\rho, a_0)| |^{-(b_0-1)/2} \times \pi$ a un unique sous-module irréductible. Ce sous-module irréductible est l'unique sous-quotient, π^0 de l'induite vérifiant $Jac_{(a_0-b_0)/2,\cdots,-(a_0+b_0)/2+1}\pi^0 \neq 0$. Et il intervient avec multiplicité 1 en tant que sous-quotient irréductible de cette induite.*

Pour démontrer la remarque, il suffit de prouver l'égalité (dans le groupe de Grothendieck convenable)

$$Jac_{(a_0-b_0)/2,\cdots,-(a_0+b_0)/2+1}\left(St(\rho, a_0)| |^{-(b_0-1)/2} \times \pi\right) = \pi. \tag{1}$$

Car l'exactitude du foncteur de Jacquet assure alors qu'un unique sous-quotient irréductible, σ de l'induite vérifie $Jac_{(a_0-b_0)/2,\cdots,-(a_0+b_0)/2+1}\sigma \neq 0$ et la réciprocité de Frobenius assure que tout sous-module irréductible de l'induite à cette propriété.
Montrons (1). On reprend les notations commodes, $(a_0 - b_0)/2 = \zeta_0 B_0$ et $A_0 = (a_0 + b_0)/2 - 1$. Le terme de gauche se calcule avec les formules de Bernstein-Zelevinsky : il a une filtration dont les quotients sont indexés par les décompositions de l'intervalle $[\zeta_0 B_0, -A_0]$ en 3 sous-ensembles, $\mathcal{E}_i$ pour $i = 1, 2, 3$, totalement ordonnés par l'ordre induit tels que

$$Jac_{x\in\mathcal{E}_1} < \zeta_0 B_0, \cdots, -A_0 >_\rho \neq 0; \circ_{x\in\mathcal{E}_2} Jac_x < A_0, \cdots, -\zeta_0 B_0 >_\rho \neq 0; Jac_{x\in\mathcal{E}_3}\pi \neq 0.$$

Ainsi $\mathcal{E}_i$ pour $i = 1, 2$ est un intervalle éventuellement vide; si $\mathcal{E}_1$ est non vide c'est nécessairement un intervalle commençant par $\zeta_0 B_0$ et si $\mathcal{E}_2$ est non vide c'est nécessairement un intervalle commençant par A_0 ; comme $A_0 > B_0$ n'est pas dans l'intervalle $[\zeta_0 B_0, -A_0]$, on sait que $\mathcal{E}_2$ est vide. Ainsi $\mathcal{E}_3$ est soit vide soit est un sous-intervalle de la forme $[x, -A_0]$ de $[\zeta_0 B_0, -A_0]$. Ainsi en appliquant 8.1, on voit que si $\mathcal{E}_3$ n'est pas vide, l'une des conditions du tableau ci-dessous est satisfaite :

$\zeta'\backslash\zeta_0$	$+$	$-$
$+$	$B' \leq B_0 < A_0 \leq A'$	Impossible
$-$	$B' \leq A_0 \leq A'$	$B_0 \leq B' \leq A_0 \leq A'$

Ce tableau est exactement le même que celui de 2.4 et aucune de ces conditions ne peut donc être satisfaite. On obtient donc toute la remarque.

3.2 Identification de π^+ dans le cas holomorphe

On continue avec les hypothèses de 3.1, c'est-à-dire que $r(s, \rho, a_0, \psi)$ n'a pas de pôle en $s = s_0 = (b_0 - 1)/2$.

3.2.1 Le cas très dominant

On suppose ici en plus que pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi) \setminus (\rho, A'_0, B'_0, \zeta'_0)$ supérieur à $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ dans $Jord(\psi^+)$ on a $B' >> A_0$ et si $(\rho, A'', B'', \zeta'')$ vérifie les mêmes propriétés, on a soit $B'' >> A'$ soit $B' >> A''$.

Lemme *Avec les hypothèses précédentes, la représentation π^0 de 3.1 est isomorphe à π^+.*

On commence par les cas où soit $\zeta_0 \neq -$ soit $B_0 \neq 1/2$. On fixe un morphisme $\psi^+_>$ qui s'obtient à partir de ψ^+ en ne changeant que $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ en $(\rho, A_0+T, B_0+T, \zeta_0)$ pour T suffisamment grand mais pas trop pour que pour tout $(\rho, A', B', \zeta') < (\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ on ait $B_0+T > A'$ et pour tout $(\rho, A', B', \zeta') > (\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ on ait encore $B' > A_0+T$. Avec les paramètres de π^+, on construit $\pi^+_>$ et par définition, on a :

$$\pi^+ = \circ_{\ell \in [1,T]} Jac_{\zeta_0(B_0+\ell), \cdots, \zeta_0(A_0+\ell)} \pi^+_>.$$

On règle le cas où $\zeta_0 = -$; comme par hypothèse $B_0 \neq 1/2$, on n'est pas dans le cas $b_0 = 2$ car il faut alors $a_0 = 1$ par $\zeta_0 = -$ ce qui contredit $B_0 \neq 1/2$. On a donc aussi $\psi_>$ qui s'obtient en remplaçant $(\rho, A'_0, B'_0, \zeta'_0)$ par $(\rho, A'_0+T+1, B'_0+T+1, \zeta'_0)$, ce qui n'est autre que $\psi^+_>$. Par construction $\pi^+_>$ a les paramètres de π, d'où aussi :

$$\pi = \circ_{\ell \in [1,T+1]} Jac_{\zeta_0(B'_0+\ell), \cdots, \zeta_0(A'_0+\ell)} \pi^+_>$$

Mais ici $B'_0 = B_0 - 1$ et $A'_0 = A_0 - 1$ d'où $\pi = Jac_{\zeta_0 B_0, \cdots, \zeta_0 A_0} \pi^+$. Cela donne la non nullité de π^+ et une inclusion

$$\pi^+ \hookrightarrow \rho| \,|^{\zeta_0 B_0} \times \cdots \times \rho| \,|^{\zeta_0 A_0} \times \pi.$$

Comme $Jac_{x, \cdots, \zeta_0(A_0)} \pi^+ = 0$ pour tout $x \in]\zeta_0 B_0, \zeta_0 A_0]$ (cf 8.1), cette inclusion se factorise par l'unique sous-module irréductible de l'induite $\rho| \,|^{\zeta_0 B_0} \times \cdots \times \rho| \,|^{\zeta_0 A_0}$ qui n'est autre que $St(\rho, a_0)| \,|^{-(b_0-1)/2}$. Et on obtient l'identification de π^+ avec π^0 l'unique sous-module irréductible de cette induite.

On règle maintenant le cas où $\zeta_0 = +$;

ici le paramètre $\underline{t}^+$ définissant π^+ vérifie $\underline{t}^+(\rho, A_0, B_0, \zeta_0) = \underline{t}(\rho, A'_0, B'_0, \zeta_0) + 1$ et vaut 1 si $b_0 = 2$. On définit encore $\psi_>$ sans changer ψ si $b_0 = 2$ et en remplaçant $(\rho, A'_0, B'_0, \zeta'_0)$ par $(\rho, A'_0+T, B'_0+T, \zeta'_0)$ qui vaut exactement $(\rho, A_0+T-1, B_0+T+1, \zeta_0)$. Et on définit $\psi^+_>$ en remplaçant $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ par $(\rho, A_0+T, B_0+T, \zeta_0)$. On définit alors $\pi_>$ (resp. $\pi^+_>$) dans le paquet associé à $\psi_>$ (resp. $\psi^+_>$) en utilisant les paramètres de π (resp. π^+). Ainsi si la restriction de $\psi^+_>$ à W_F fois la diagonale de $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ est sans multiplicité et on a par définition une inclusion

$$\pi^+_> \hookrightarrow < B_0+T, \cdots, -A_0-T >_\rho \times \pi_>. \tag{1}$$

Si $\psi^+_>$ n'est pas de restriction discrète à la diagonale, on vérifie, après avoir fait "redescendre" les quadruplets stritement plus petits que $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ que l'on garde la même inclusion. Par définition :

$$\pi^+ := \circ_{\ell \in [1,T]} Jac_{(B_0+\ell), \cdots, A_0+\ell} \pi^+_>;$$

$$\pi := \circ_{\ell \in [1,T]} Jac_{(B_0+1+\ell), \cdots, A_0-1+\ell} \pi_>.$$

On sait donc que l'on a une inclusion

$$\pi_> \hookrightarrow \left\langle \begin{matrix} B_0+T+1 & \cdots & A_0+T-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_0+2 & \cdots & A_0 \end{matrix} \right\rangle_\rho \times \pi.$$

On utilise l'inclusion suivante dans un GL convenable :

$$< B_0+T, \cdots, -A_0-T >_\rho \hookrightarrow < B_0+T, \cdots, B_0+1 >_\rho \times < B_0, \cdots, -A_0 >_\rho \times$$

$$< -(A_0+1), \cdots, -(A_0+T) >_\rho$$

et en composant avec (1) et l'inclusion ci-dessus, on obtient : $\pi^+ \hookrightarrow$

$$< B_0+T, \cdots, B_0+1 >_\rho \times < B_0, \cdots, -A_0 >_\rho \times < -(A_0+1), \cdots, -(A_0+T) >_\rho \times$$

$$\left\langle \begin{matrix} B_0+T+1 & \cdots & A_0+T-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_0+2 & \cdots & A_0 \end{matrix} \right\rangle_\rho \times \pi$$

$$\simeq < B_0+T, \cdots, B_0+1 >_\rho \times \left\langle \begin{matrix} B_0+T+1 & \cdots & A_0+T-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_0+2 & \cdots & A_0 \end{matrix} \right\rangle_\rho \times < B_0, \cdots, -A_0 >_\rho$$

$$\times < -(A_0+1), \cdots, -(A_0+T) >_\rho \times \pi$$

On sait aussi que $\rho| |^x \times \pi$ est irréductible si $x \in [A_0+1, A_0+T]$ grâce à 8.2 dont les hypothèses sont satisfaites : puisque $\zeta_0 = +$, on a supposé (cf. 2.5.1) que tout $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ vérifiant $A \geq A_0$ est plus grand que $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ dans $Jord(\psi^+)$. Il vérifie donc aussi $B >> A_0+T$. D'où

$$< -(A_0+1), \cdots, -(A_0+T) >_\rho \times \pi \simeq < (A_0+T), \cdots, (A_0+1) >_\rho \times \pi.$$

En remontant ci-dessus, on obtient une inclusion de $\pi^+_> \hookrightarrow$

$$< B_0+T, \cdots, B_0+1 >_\rho \times \left\langle \begin{matrix} B_0+T+1 & \cdots & A_0+T-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_0+2 & \cdots & A_0 \end{matrix} \right\rangle_\rho \times < B_0, \cdots, -A_0 >_\rho \times$$

$$< (A_0+T), \cdots, A_0+1 >_\rho \times \pi \simeq$$

$$< B_0+T, \cdots, B_0+1 >_\rho \times \left\langle \begin{matrix} B_0+T+1 & \cdots & A_0+T-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_0+2 & \cdots & A_0 \end{matrix} \right\rangle_\rho \times < (A_0+T), \cdots, (A_0+1) >_\rho$$

$$\times < B_0, \cdots, -A_0 >_\rho \times \pi.$$

Par réciprocité de Frobenius $\pi^+ = \circ_{\ell \in [1,T]} Jac_{B_0+\ell, \cdots, A_0+\ell} \pi^+_>$ est non nul et à un morphisme non nul dans l'induite $< B_0, \cdots, -A_0 >_\rho \times \pi$; comme π^+ est irréductibilité, il est donc un sous-module de cette induite et coïncide avec π^0 défini en 3.1 par unicité du sous-module irréductible. D'où aussi l'assertion dans ce cas.
On considère maintenant le cas où $\zeta_0 = -$ et $B_0 = 1/2$. Par hypothèse $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ est le plus petit élément de $Jord(\psi^+)$ et quand $b_0 \neq 2$, $(\rho, A'_0, B'_0, \zeta'_0)$ est le plus petit élément de $Jord(\psi)$. Ainsi on sait que les restrictions de ψ^+ et de ψ à W_F fois la diagonale de $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ sont sans multiplicité. On connaît donc π^+ et π comme certain sous-module irréductible. On reprend ces constructions.
On règle d'abord le cas où $b_0 = 2$ et $a_0 = 1$; comme $\underline{\eta}^+(\rho, 1/2, 1/2, -) = +$, par définition π^+ est l'unique sous-module irréductible de l'induite $\rho| |^{-1/2} \times \pi$ et c'est bien la même définition que π^0. D'où le résultat trivialement dans ce cas.
On suppose donc maintenant que $b_0 > 2$ avec toujours $a_0 = b_0 - 1$. D'où $\zeta'_0 = +$, $\zeta_0 = -$, $B_0 = B'_0 = 1/2$.
On pose $t := \underline{t}(\rho, A'_0, B'_0, \zeta'_0)$. On fait une récurrence sur t. Pour initialiser la récurrence, supposons que $t = 0$. Dans ce cas, on sait d'après [17] 4.2 (notre t était ℓ) que π est dans le paquet associé au morphisme ψ' tel que $Jord(\psi')$ se déduit de $Jord(\psi)$ en remplaçant $(\rho, A'_0, B'_0, +)$ par l'ensemble des éléments $(\rho, C, C, +)$ pour $C \in [A'_0, B'_0]$ avec comme

paramètre $\underline{t}', \underline{\eta}'$ qui se déduit de $\underline{t}, \underline{\eta}$, en posant simplement $\underline{t}'(\rho, C, C, +) = 0$ (on n'a pas le choix) et $\underline{\eta}'(\rho, C, C, +) = \underline{\eta}(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')(-1)^{C-B_0'}$. On distingue suivant les valeurs de $\underline{\eta}(\rho, A_0', B_0', \zeta_0')$.
On suppose d'abord que $\underline{\eta}(\rho, A_0', B_0', \zeta_0') = +$. On note ψ'' le morphisme qui se déduit de ψ' en remplaçant chaque $(\rho, C, C, +)$ comme ci-dessus par $(\rho, C-1, C-1, +)$ sauf $(\rho, 1/2, 1/2, +)$ qui disparaît. Et on note π' la représentation dans le paquet associé à ψ'' ayant les paramètres de π, après la translation par -1, c'est-à-dire que l'on a un signe sur les $(\rho, C-1, C-1, +)$ pour $C \in]1/2, A_0']$ qui alterne en valant maintenant $-$ sur $(\rho, 1/2, 1/2, +)$. Alors, d'après les définitions ([15], 2.3 **1**pour le calcul de $Jac_{1/2}\pi$ et [17] 4.4 pour le calcul $Jac_{3/2,\cdots A_0'} Jac_{1/2}\pi = \pi'$), π est l'unique sous-module irréductible de l'induite

$$< 1/2, \cdots, A_0' >_\rho \times \pi'. \tag{1}$$

On note ψ''' le morphisme qui se déduit de ψ' en remplaçant chaque $(\rho, C, C, +)$ pour $C \in [1/2, A_0' - 1]$ en $(\rho, C, C, -)$. Et π' est aussi dans le paquet associé à ψ''' avec les mêmes paramètres que que pour ψ'' : une référence pour cela est que l'on peut se ramener au cas élémentaire (pour tout $(\rho', A', B', \zeta') \in Jord(\psi''), A' = B'$) et appliquer le théorème 5 de [15] avec $a = 2A_0' - 1$; l'involution qui y est défini est l'identité sur π' car tous les modules de Jacquet à cause de l'alternance des signes en commençant par $-$ (première propriété de [15] 2.2, puiqu'ici d'après ce que l'on vient de rappeler le $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ de loc.cite vaut $2A_0' - 1$) . On reprend la définition de π^0 comme unique sous-module irréductible d'une induite (cf. 3.1) et on écrit la suite d'inclusion, en se rappelant que $A_0' = A_0 - 1$

$$\pi^0 \hookrightarrow < -1/2, \cdots, -A_0 >_\rho \times < 1/2, \cdots, A_0 - 1 >_\rho \times \pi' \hookrightarrow$$

$$\rho| \,|^{-1/2} \times < -3/2, \cdots, -A_0 >_\rho \times < 1/2, \cdots, A_0 - 1 >_\rho \times \pi'$$

$$\simeq \rho| \,|^{-1/2} \times < 1/2, \cdots, A_0 - 1 >_\rho \times < -3/2, \cdots, -A_0 >_\rho \times \pi'. \hookrightarrow$$

$$\rho| \,|^{-1/2} \times < 1/2, \cdots, A_0 - 1 >_\rho \times < -3/2, \cdots, -A_0 + 1 >_\rho \times \rho| \,|^{-A_0} \times \pi'.$$

L'induite $\rho| \,|^{-A_0} \times \pi'$ est irréductible, d'après 8.2 puisque π' est dans le paquet associé à ψ'' et que tout $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi'')$ vérifie soit $A' = B' \leq A_0' - 1 = A_0 - 2$ soit $B' >> A_0$. D'où encore

$$\pi^0 \hookrightarrow \rho| \,|^{-1/2} \times < 1/2, \cdots, A_0 - 1 >_\rho \times < -3/2, \cdots, -A_0 + 1 >_\rho \times \rho| \,|^{A_0} \times \pi' \simeq$$

$$\rho| \,|^{-1/2} \times < 1/2, \cdots, A_0 - 1 >_\rho \times \rho| \,|^{A_0} \times < -3/2, \cdots, -A_0 + 1 >_\rho \times \pi'.$$

On veut vérifier que cette inclusion se factorise par l'unique sous-module irréductible inclut dans l'induite formée par les 3 premiers facteurs. Pour cela il suffit de montrer que $Jac_{\rho| \,|^x}\pi^0 = 0$ pour $x = 1/2, A_0$. On revient à (1) qui donne

$$\pi^0 \hookrightarrow < -1/2, \cdots, -A_0 > \times < 1/2, \cdots, A_0 - 1 >_\rho \times \pi' \hookrightarrow$$

$$\rho| \,|^{-1/2} \times \rho| \,|^{1/2} \times < -3/2, \cdots, -A_0 >_\rho \times < 3/2, A_0' >_\rho \times \pi'. \tag{2}$$

L'inclusion se factorise soit par $< -1/2, 1/2 >_\rho \times \cdots$ soit par $< 1/2, -1/2 >_\rho \times \cdots$. Dans le premier cas où a sûrement $Jac_{1/2}\pi^0 = 0$ car $Jac_{1/2}\pi' = 0$ et dans le second on a $Jac_{-1/2}\pi^0 = 0$ car $Jac_{-1/2}\pi' = 0$. Donc la 2e possibilité est absurde et c'est la première qui est vérifiée ; d'où

$$\pi^0 \hookrightarrow < -1/2, 1/2 >_\rho \times < -3/2, \cdots, -A_0 >_\rho \times < 3/2, A_0' >_\rho \times \pi'$$

et $Jac_{1/2}$ de l'induite de droite vaut 0 ; d'où a fortiori $Jac_{1/2}\pi^0 = 0$. Montrons maintenant que $Jac_{A_0}\pi^0 = 0$; ici on se rappelle que $A'_0 = A_0 - 1$. On vérifie que l'induite $\rho| \,|^{A_0} \times \pi$ est réductible, elle a un unique sous-module irréductible, π_s, et un unique quotient irréductible π_q : en effet avec (1)

$$\rho| \,|^{A_0} \times \pi \hookrightarrow \rho| \,|^{A_0} \times < 1/2, \cdots, A_0 - 1 >_\rho \times \pi'.$$

L'inclusion se factorise soit par l'unique sous-module irréductible inclus dans $\rho| \,|^{A_0} \times < 1/2, \cdots, A_0 - 1 >_\rho$, noté τ soit par $< 1/2, \cdots, A_0 >_\rho \times \pi'$. On a

$$Jac_{A_0} < 1/2, \cdots, A_0 >_\rho \times \pi' = 0$$

car $Jac_{A_0}\pi' = 0$ donc un sous-module irréductible de $\rho| \,|^{A_0} \times \pi$ n'est sûrement pas dans l'induite $< 1/2, \cdots, A_0 >_\rho \times \pi'$. A l'inverse $Jac_{-A_0}\tau \times \pi' = 0$ et tout quotient irréductible de $\rho| \,|^{A_0} \times \pi$ a la propriété opposée. D'où la réductibilité de $\rho| \,|^{A_0} \times \pi$; l'unicité de π_s et π_q utilise alors simplement le fait que $Jac_{\pm A_0}\pi = 0$. De plus π_q est le seul sous-quotient irréductible de l'induite vérifiant $Jac_{-A_0} \neq 0$. D'où

$$\pi^0 \hookrightarrow < -1/2, \cdots, -A_0 + 1 >_\rho \times \rho| \,|^{-A_0} \times \pi$$

se factorise par $< -1/2, \cdots, -A_0 + 1 >_\rho \times \pi_q$ et en particulier $Jac_{A_0}\pi^0 = 0$. On revient à l'inclusion (2) et on obtient

$$\pi^0 \hookrightarrow < -1/2, 1/2, \cdots, A_0 - 1, A_0 >_\rho \times < -3/2, \cdots, -A_0 + 1 >_\rho \times \pi'. \tag{3}$$

L'induite $< -3/2, \cdots, -A_0 + 1 >_\rho \times \pi'_{>>}$ a un unique sous-module irréductible ([17] 4.4) qui est précisément la représentation du paquet associé au morphisme $\tilde{\psi}$ qui s'obtient en remplaçant $(\rho, C, C, -) \in Jord(\psi''_{>>})$ pour tout $C \in [1/2, A'_0 - 2]$ par $(\rho, C + 1, C + 1, -)$ et en gardant les mêmes signes. On note $\tilde{\pi}$ cette représentation et c'est la seule sous représentation irréductible de l'induite qui vérifie $Jac_{-3/2, \cdots, -A_0+1} \neq 0$. Donc nécessairement (3) se factorise par

$$\pi^0 \hookrightarrow < -1/2, 1/2, \cdots, A_0 - 1, A_0 >_\rho \times \tilde{\pi}.$$

Mais π^+ vérifie la même inclusion et l'induite de droite a un unique sous-module irréductible d'où l'isomorphisme $\pi^0 \simeq \pi^+$.
Le cas où $\underline{\eta}(\rho, A'_0, B'_0, \zeta'_0) = -$ avec toujours $\underline{t}(\rho, A'_0, B'_0, \zeta'_0) = 0$ est plus simple : π est dans le paquet obtenu en remplaçant $(\rho, A'_0, B'_0, +)$ par $\cup_{C \in [1/2, A'_0]}(\rho, C, C, +)$ avec un signe qui alterne en commençant par $-$; on peut donc encore remplacer les $(\rho, C, C, +)$ par $(\rho, C, C, -)$ (même argument que ci-dessus pour passer de ψ'' à ψ'''). Par sa définition, π^+ est dans le paquet où on remplace dans $Jord(\psi^+)$ le quadruplet $(\rho, A_0, B_0, -)$ par $\cup_{C \in [1/2, A_0]}(\rho, C, C, -)$ et avec comme paramètre un signe qui alterne sur ces éléments en commençant par $+$. D'où directement une inclusion (cf. ci-dessus) :

$$\pi^+ \hookrightarrow < -1/2, \cdots, -A_0 >_\rho \times \pi.$$

Et l'assertion résulte de l'unicité du sous-module irréductible.
On suppose maintenant que $t > 0$ et on admet la remarque pour le morphisme ψ' qui s'obtient en remplaçant $(\rho, A'_0, B'_0, +)$ par $(\rho, A'_0 - 2, B'_0, +)$ pour les paramètres $\underline{t}'$ valant $t-1$ sur cet élément. On vérifie d'abord qu'il existe π' dans le paquet associé à ce morphisme avec les mêmes paramètres que π sauf t remplacé par $t - 1$: On vérifie que l'on a une inclusion

$$\pi \hookrightarrow < 1/2, \cdots, -A'_0 >_\rho \times < 3/2, \cdots, A'_0 - 1 >_\rho \times \pi';$$

l'apparition de $< 1/2, \cdots, -A_0' >_\rho$ vient du fait que $t \geq 1$ et la description rappelée dans l'introduction de [17] et celle de $< 3/2, \cdots, A_0' - 1 >_\rho$ est encore l'application de [17] 4.4. On sait aussi avec 8.2 que $\rho| |^{A_0'} \times \pi'$ est irréductible. D'où encore les inclusions

$$\pi \hookrightarrow < 1/2, \cdots, -A_0' + 1 >_\rho \times \rho| |^{-A_0'} \times < 3/2, \cdots, A_0' - 1 >_\rho \times \pi' \simeq$$

$$\pi \hookrightarrow < 1/2, \cdots, -A_0' + 1 >_\rho \times < 3/2, \cdots, A_0' - 1 >_\rho \times \rho| |^{-A_0'} \times \pi'$$

$$\simeq < 1/2, \cdots, -A_0' + 1 >_\rho \times < 3/2, \cdots, A_0' - 1 >_\rho \times \rho| |^{A_0'} \times \pi' \hookrightarrow$$

$$\rho| |^{1/2} \times < -1/2, \cdots, -A_0' + 1 >_\rho \times < 3/2, \cdots, A_0' - 1 >_\rho \times \rho| |^{A_0'} \times \pi'$$

$$\simeq \rho| |^{1/2} \times < 3/2, \cdots, A_0' - 1 >_\rho \times \rho| |^{A_0'} \times < -1/2, \cdots, -A_0' + 1 >_\rho \times \pi'.$$

On sait que $Jac_x \pi = 0$ pour $x = 3/2$ et $x = A_0'$ car π est dans le paquet associé à ψ et que $Jord(\psi)$ ne contient pas d'élément de la forme (ρ, A', B', ζ') avec $\zeta' B' = 3/2$ ou $\zeta' B = A_0'$ (et on applique 8.1 avec $x = y$) d'où encore

$$\pi \hookrightarrow < 1/2, \cdots, A_0' >_\rho \times < -1/2, \cdots, -A_0' + 1 >_\rho \times \pi'. \quad (4)$$

On note π'^{+} l'unique sous-module irréductible de l'induite $< -1/2, \cdots, -A_0' + 1 >_\rho \times \pi'$; on sait, par l'hypothèse de récurrence que c'est la représentation associé au morphisme qui se déduit de ψ' en remplaçant $(\rho, A_0' - 2, 1/2, +)$ par $(\rho, A_0' - 1, 1/2, -)$ et avec les paramètres qui sont ceux de π^+ sauf le t^+ qui est $t^+ - 1$.
Comme $Jac_{1/2, -1/2, \cdots, -A_0'+1} \pi \neq 0$, l'inclusion (4) se factorise nécessairement par

$$\pi \hookrightarrow < 1/2, \cdots, A_0' >_\rho \times \pi'^{+}.$$

D'où, en se rappelant que $A_0 = A_0' + 1$:

$$\pi^0 \hookrightarrow < -1/2, \cdots, -A_0 >_\rho \times < 1/2, \cdots, A_0 - 1 >_\rho \times \pi'^{+} \hookrightarrow$$

$$\rho| |^{-1/2} \times < -3/2, \cdots, -A_0 + 1 >_\rho \times \rho| |^{-A_0} \times < 1/2, \cdots, A_0 - 1 >_\rho \times \pi'^{+}.$$

L'induite $\rho| |^{A_0} \times \pi'^{+}$ est irréductible (cf. 8.2) car $Jord(\psi'^{+})$ contient $(\rho, A_0' - 1, 1/2, -)$ avec $A_0' = A_0 - 1$ et d'autres termes qui n'ont rien à voir avec A_0 ; d'où :

$$\pi^0 \hookrightarrow \rho| |^{1/2} \times < -1/2, \cdots, -A_0 + 1 >_\rho \times \rho| |^{-A_0} \times < -3/2, \cdots, -A_0 + 1 >_\rho \times \pi'^{+}.$$

Comme dans la preuve où $t = 0$, on vérifie que cette inclusion se factorise par

$$\pi^0 \hookrightarrow < 1/2, -1/2, \cdots, -A_0 + 1, -A_0 >_\rho \times < -3/2, \cdots, -A_0 + 1 >_\rho \times \pi'^{+}.$$

La représentation π^+ a la même propriété et l'induite de droite a un unique sous-module irréductible. D'où $\pi^+ \simeq \pi^0$ comme annoncé.

3.2.2 Descente dans le cas holomorphe

Ici on suppose simplement que $r(s, \rho, a_0, \psi)$ n'a pas de pôle.

Lemme *La représentation π^+ est non nulle et est l'unique sous-module irréductible de l'induite $St(\rho, a_0)| |^{-(b_0-1)/2} \times \pi$.*

On fixe $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ strictement supérieur à $(\rho, A'_0, B'_0, \zeta_0)$ et on suppose que pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ strictement supérieur à (ρ, A, B, ζ) on a $B' >> A$. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A+1, B+1, \zeta)$ et π' la représentation dans le paquet associé à ψ' ayant les mêmes paramètres que π. C'est-à-dire $\pi = Jac_{\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)} \pi'$ ou encore

$$\pi' \hookrightarrow < \zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1) >_\rho \times \pi.$$

On admet le lemme pour ψ', π' et on le démontre pour ψ, π. Il est clair que cela permet de redescendre du cas déjà démontré en 3.2.1 au cas cherché. On note π'^+ l'analogue de π^+ et on sait que π'^+ est l'unique sous-module irréductible de l'induite

$$\pi'^+ \hookrightarrow < \zeta_0(B_0, \cdots, -A_0) >_\rho \times \pi'.$$

En composant avec l'inclusion reliant π' et π, on obtient

$$\pi'^+ \hookrightarrow < \zeta_0 B_0, \cdots, -A_0 >_\rho \times < \zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1) >_\rho \times \pi.$$

On va vérifier que l'induite $< \zeta_0 B_0, \cdots, -A_0 >_\rho \times < \zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1) >_\rho$ dans le GL convenable est irréductible. C'est évident si $\zeta_0 = -$ et $\zeta = +$ car avec $\zeta_0 = -$ on a supposé que $B_0 > 0$. On considère donc les autres cas et d'abord celui où $A < A_0$; si $\zeta_0 = -$ on a aussi $\zeta = -$ et par la propriété $\mathcal{P}$ de l'ordre sur $Jord(\psi^+)$, $B \geq B_0$ puisque $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0, B_0, \zeta)$. Ainsi le segment $[-B, -A]$ est inclus dans $[\zeta_0 B_0, -A_0]$. Si $\zeta_0 = +$ et $\zeta = -$ on a encore l'inclusion du segment $[-B, -A]$ dans le segment $[\zeta_0 B_0, -A_0]$. D'où l'irréductibilité dans ces cas. Si $\zeta = \zeta_0 = +$, comme $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A'_0, B'_0, \zeta_0)$, la condition (0) de 2.5.1 assure que $B > B_0 + 1$; d'où $B + 1 - B_0 \geq 2$ ce qui assure encore l'irréductibilité.
Supposons que $A \geq A_0$. Par hypothèse la fonction $r(s, \rho, a_0, \psi)$ n'a pas de pôle en $s = (b_0 - 1)/2$.
Si $\zeta_0 = +$, on a donc, d'après 2.4, $B > B_0$ si $\zeta = +$ et $B > A_0$ si $\zeta = -$; d'où si $\zeta = +$, $(B+1) - B_0 \geq 2$ et si $\zeta = -$, $-A_0 + (B+1) \geq 2$ et encore l'irréductibilité.
Si $\zeta_0 = \zeta = -$, l'hypothèse d'holomorphie entraîne que soit $B_0 > B$ soit $B > A_0$; dans le premier cas, le segment $[-B_0, -A_0]$ est inclus dans le segment $[-B, -A]$ et dans le 2e cas, les segments ne sont pas liés. On a donc encore l'irréductibilité de l'induite écrite précédemment.

D'où, par échange des facteurs :

$$\pi'^+ \hookrightarrow < \zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1) >_\rho \times < \zeta_0(B_0, \cdots, -A_0) >_\rho \times \pi.$$

Or $\pi^+ = Jac_{\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)} \pi'^+$ (car par définition des paramètres, π^+ se déduit de π'^+ de la même façon que π se déduit de π'). Par réciprocité de Frobenius appliqué à l'induite ci-dessus, π^+ s'envoie de façon non nulle dans l'induite $< \zeta_0(B_0, \cdots, -A_0) >_\rho \times \pi$. Ceci est bien l'assertion cherchée et cela termine la preuve.

4 Image des opérateurs d'entrelacement dans le cas de bonne parité

4.1 Le cas holomorphe

Lemme *On suppose que $r(s, \rho, a_0, \psi)$ n'a pas de pôle en $s = (b_0 - 1)/2$. L'image de l'opérateur $N_\psi(s, \rho, a_0, \pi)$ en $s = (b_0 - 1)/2$ est irréductible et non nulle ; c'est la représentation π^+ décrite en 2.5.2.*

L'hypothèse assure que l'opérateur d'entrelacement standard $M(s,\rho,a_0,\pi)$ est comme $N_\psi(s,\rho,a_0,\pi)$ holomorphe en $s = s_0$ et qu'en ce point les 2 opérateurs coïncident à un scalaire non nul près. Or un opérateur d'entrelacement standard, en un point où il est holomorphe y est certainement non nul. D'où la non nullité annoncée dans l'énoncé et l'image contient certainement π^+ comme sous-module irréductible. Il faut donc démontrer l'irréductibilité de l'image.
Avec [21] II.1, on sait qu'il existe un automorphisme explicite (venant du groupe des similitudes) tel que toute représentation irréductible du groupe considéré est isomorphe à sa représentation duale transformée par cet automorphisme. Ainsi en dualisant et en appliquant cet automorphisme, on voit que π^+ est aussi un quotient irréductible de l'induite $< A_0, \cdots, -\zeta_0 B_0 >_\rho \times\pi$. Par multiplicité 1 de π^+ comme sous-quotient irréductible de l'induite écrite (cf. 3.1 et 3.2.2), $N_\psi(s_0,\pi,\rho,a_0)$ n'annulle pas ce quotient et l'envoie dans l'unique sous-module irréductible de l'induite $< \zeta_0 B_0, \cdots, -A_0 >_\rho \times\pi$. Ainsi π^+ est facteur direct de l'image mais par unicité du sous-module irréductible, sous nos hypothèses, l'image est réduite à π^+. Cela termine la preuve.

4.2 Descente à partir du cas holomorphe

On a fixé $\psi, (\rho, a_0, b_0)$ et on fixe aussi un morphisme ψ et π dans le paquet de représentations associé à ψ ; on suppose que ψ est de bonne parité (cf. 2.2 pour cette définition).

Proposition *(i) On suppose que (ρ, a_0, b_0) est de bonne parité et que soit $b_0 = 2$, soit $(\rho, a_0, b_0-2) \in Jord(\psi)$ et ψ^+ ainsi que π^+ sont définis. Alors l'image de l'opérateur d'entrelacement $N_\psi(s,\rho,a_0,\pi)$ en $s = (b_0-1)/2$ est exactement π^+ c'est-à-dire vaut 0 si $\pi^+ = 0$ et est irréductible isomorphe à π^+ sinon.*
(ii) Sans hypothèse sur (ρ, a_0, b_0), l'image de $N_\psi(s,\rho,a_0,\pi)$ en $s = (b_0-1)/2$ est soit nulle soit irréductible.

(i) Ici ψ^+ est défini, on pose encore $s_0 = (b_0-1)/2$. On reprend les notations $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$, où ζ_0 est le signe de $(a_0 - b_0)$, + si ce nombre est 0 et où $A_0 = (a_0+b_0)/2 - 1$, $B_0 = |(a_0-b_0)|/2$. On fixe $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ et on suppose que $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ dans $Jord(\psi^+)$.
On suppose aussi que pour tout (ρ, A', B', ζ') dans $Jord(\psi)$ strictement supérieur à (ρ, A, B, ζ) on a $B' >> A$. On définit $\psi_>$ comme le morphisme qui s'obtient à partir de ψ en changeant (ρ, A, B, ζ) en $(\rho, A+1, B+1, \zeta)$. Les hypothèses assurent que $\psi_>$ domine ψ et en reprenant la construction des éléments de ψ on peut partir d'un morphisme qui domine à la fois $\psi_>$ et ψ et avant de construire les représentations associées à ψ on construit celles associées à $\psi_>$ et on obtient celles qui sont associées à ψ en prenant $Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)}$ de celles associées à $\psi_>$. Ainsi il existe une unique représentation $\pi_>$ dans le paquet associée à $\psi_>$ tel que $\pi = Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)}\pi$, ou encore, $\pi_>$ est l'unique sous-module irréductible de l'induite

$$\pi_> \hookrightarrow < \zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1) >_\rho \times\pi. \quad (1)$$

Admettons le résultat pour $\psi_>, (\rho, a_0, b_0)$ et $\pi_>$ et montrons le pour π. Avant de faire cela remarquons que de cette façon on démontrera effectivement le théorème sans les hypothèses $>>$ car pour arriver à π, on part du cas holomorphe déjà traité et on redescend par des étapes comme celles décrites ci-dessus. De plus, comme le cas holomorphe est déjà connu, on peut supposer qu'il existe $(\rho, A', B', \zeta') \leq (\rho, A, B, \zeta)$ (il peut y avoir égalité) qui participe aux pôles de $r(s,\rho,a_0,\psi)$ en $s = (b_0-1)/2$. Avec la 2e condition de $\mathcal{P}_p$ dans 2.5.1 cela permet de supposer que $A \geq A_0$, hypothèse que nous faisons dans tout ce qui suit.

La preuve de (ii) est partiellement commune avec celle de (i) ; pour pouvoir traiter les 2 en même temps, il suffit de remarquer que si la fonction $r(s, \rho, a_0, \psi)$ est holomorphe en $s = s_0$, l'opérateur $N_\psi(\rho, a_0, \pi, s)$ coïncide en $s = s_0$ à un scalaire près avec l'opérateur d'entrelacement standard ; ainsi l'opérateur d'entrelacement standard est holomorphe et donc nécessairement non nul ; avec l'argument de 3.2.2 son image est l'unique sous-module irréductible (cf. 3.1) de $St(\rho, a_0)| |^{-(b_0-1)/2} \times \pi$ et en particulier est irréductible. Donc (ii) est aussi démontré dans le cas holomorphe et même si $(\rho, a_0, b_0-2) \notin Jord(\psi)$, on continue la preuve en supposant simplement que $A \geq A_0$; $\pi_>$ est bien défini comme ci-dessus.

On va étudier le diagramme ci-dessous, dont les flèches, qui ne sont pas les inclusions se déduisant de (1), sont des opérateurs d'entrelacement normalisés uniquement déterminés à une fonction holomorphe inversible près par le choix d'un élément du groupe de Weyl qui autorise les flèches ; les doubles classes de ces éléments du groupe de Weyl sont uniquement déterminées pour s général et donc pour tout s.

$$\begin{array}{ccc}
St(\rho, a_0)| |^s \times \pi_> & \hookrightarrow & St(\rho, a_0)| |^s \times <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times \pi \\
 & & \downarrow \\
 & & <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times St(\rho, a_0)| |^s \times \pi \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & & <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times St(\rho, a_0)| |^{-s} \times \pi \\
 & & \uparrow \\
St(\rho, a_0)| |^{-s} \times \pi_> & \hookrightarrow & St(\rho, a_0)| |^{-s} \times <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times \pi
\end{array}$$

Ce diagramme commute à une fonction méromorphe près : en effet il faut comparer le composé d'applications suivantes :

$$\begin{array}{c}
St(\rho, a_0)| |^s \times <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times \pi \\
\downarrow \\
<\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times St(\rho, a_0)| |^s \times \pi \\
\downarrow \\
<\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times St(\rho, a_0)| |^{-s} \times \pi
\end{array}$$

au composé des applications

$$\begin{array}{c}
St(\rho, a_0)| |^s \times <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times \pi \\
\downarrow \\
St(\rho, a_0)| |^{-s} \times <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times \pi \\
\downarrow \\
<\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times St(\rho, a_0)| |^{-s} \times \pi.
\end{array}$$

Or ces composés correspondent à 2 décompositions d'un élément du groupe de Weyl en produit d'autres éléments mais la première décomposition se fait avec ajout des longueurs ce qui n'est pas le cas de la deuxième. Ces 2 composés sont donc égaux (à une fonction holomorphe inversible près) à condition de multiplier le premier composé par la fonction méromorphe produit des opérateurs d'entrelacement (dans un groupe GL convenable) :

$$<\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times St(\rho, a_0)| |^{-s} \rightarrow St(\rho, a_0)| |^{-s} \times <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho$$

$$\rightarrow <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times St(\rho, a_0)| |^{-s}.$$

On note $\Delta(s)$ cette fonction méromophe, c'est le produit des facteurs de normalisation à la Langlands-Shahidi de [24] ; grâce à [12] th. 8.2, on sait la calculer. Elle vaut, à une fonction holomorphe inversible près

si $\zeta=+$,
$$\frac{L(St(\rho,a_0)\times\rho,B+1+s)}{L(St(\rho,a_0)\times\rho,A+2+s)}\frac{L(St(\rho,a_0)\times\rho,-s-(A+1))}{L(St(\rho,a_0)\times\rho,-s-B)},$$
ou encore, en posant $s=(b_0-1)/2+s'$
$$\frac{L(\rho\times\rho,(a_0-1)+(b_0-1)/2+B+1+s')}{L(\rho\times\rho,(a_0-1)/2+(b_0-1)/2+A+2+s')}$$
$$\times\frac{L(\rho\times\rho,(a_0-1)/2-(b_0-1)/2-(A+1)-s')}{L(\rho\times\rho,(a_0-1)/2-(b_0-1)/2-B-s')}=$$
$$\frac{L(\rho\times\rho,A_0+B+1+s')}{L(\rho\times\rho,A_0+A+2+s')}\frac{L(\rho\times\rho,\zeta_0B_0-(A+1)-s')}{L(\rho\times\rho,\zeta_0B_0-B-s')}.$$
Quel que soit la valeur de ζ_0, on a sûrement $\zeta_0B_0-A-1<0$ car $A\geq A_0\geq B_0$ et l'ordre de la fonction $\Delta(s)$ en $s'=0$ est 1 si $\zeta_0B_0=B$ et 0 sinon. La fonction est donc holomorphe inversible en $s'=0$ sauf exactement si $\zeta_0=+$ et $B_0=B$ où elle a un zéro simple. On remarque pour la suite que l'ordre de $\Delta(s)$ en $s=s_0$ est exactement l'ordre de la fonction $r(s,\rho,a_0,\psi)/r(\psi_>,\rho,a_0,s)$: en effet ces 2 fonctions ont même ordre sauf si $(\rho,A+1,B+1,\zeta)$ participe aux pôles du dénominateur sans que (ρ,A,B,ζ) participe aux pôles du numérateur ou vice et versa. Si $\zeta_0=-$, comme $\zeta=+$ aucun des 2 ne participe aux pôles et on a le résultat. Si $\zeta_0=+$ on a par hypothèse $A\geq A_0$ donc le seul cas où la fonction quotient n'est pas d'ordre 0 est celui où $B_0\geq B$ sans avoir $B_0\geq B+1$ où elle a un zéro simple. Et c'est bien le cas $B_0=B$.
Si $\zeta=-$, par un calcul analogue, on trouve que $\Delta(s)$ à une fonction holomorphe inversible près vaut :
$$\frac{L(\rho\times\rho,A_0-(A+1)+s')}{L(\rho\times\rho,A_0-B+s')}\frac{L(\rho\times\rho,\zeta_0B_0+B+1-s')}{L(\rho\times\rho,\zeta_0B_0+A+2-s')}.$$
En $s'=0$, cette fonction est holomorphe inversible sauf exactement si :
$\zeta_0=+$ et $A_0=B$ où elle a un zéro d'ordre 1 ;
$\zeta_0=-$ et $B_0=B+1$ où elle a un pôle d'ordre 1, ou $A_0=B$ où elle a un 0 d'ordre 1.
On vérifie ici aussi que $r(s,\rho,a_0,\psi)/r(\psi_>,\rho,a_0,s)$ a exactement le même ordre que $\Delta(s)$ en $s'=s-(b_0-1)/2=0$: en effet si $\zeta_0=+$ et $\zeta=-$, on a sûrement $A\geq A_0$ et (ρ,A,B,ζ) contribue aux pôle de $r(s,\rho,a_0,\psi)$ en $s=s_0$ si et seulement si $B\leq A_0$. Et on a un résultat analogue pour $(\rho,A+1,B+1,\zeta)$ et $r(s,\rho,a_0,\psi)$ donc la seul différence d'ordre se produit quand $B=B_0$ et on a un zéro simple. Supposons que $\zeta_0=-$; comme $\zeta=-$, on a sûrement aussi $A\geq A_0$ et (ρ,A,B,ζ) contribue aux pôles de $r(s,\rho,a_0,\psi)$ en $s=s_0$, exactement quand $B\in[B_0,A_0]$. Et $(\rho,A+1,B+1,\zeta)$ contribue aux pôles de $r(\psi_>,\rho,a_0,s)$, en $s=s_0$, si $B+1\in[B_0,A_0]$. Donc si $B+1=B_0$, $r(\psi_>,\rho,a_0,s)/r(s,\rho,a_0,\psi)$ a un pôle simple et si $B=A_0$ ce quotient à un zéro simple. D'où le résultat annoncé.
On obtient donc un diagramme commutatif, à une fonction holomorphe inversible près en $s=s_0$:
$$\begin{array}{ccc} St(\rho,a_0)|\,|^s\times\pi_> & \to & <\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)>_\rho\times St(\rho,a_0)|\,|^s\times\pi \\ N_{\psi_>}(s,\rho,a_0,\pi_>)\downarrow & & N_\psi(s,\rho,a_0,\pi)\downarrow \\ St(\rho,a_0)|\,|^{-s}\times\pi_> & \to & <\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)>_\rho\times St(\rho,a_0)|\,|^{-s}\times\pi. \end{array}$$
On note $H_1(s)$ et H_2 les morphismes horizontaux. Ils sont le composé de l'inclusion (1) de $\pi_>$ dans $<\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)>_\rho\times\pi$ suivi pour $H_1(s)$ de l'opérateur d'entrelacement standard :
$$M_1(s):=St(\rho,a_0)|\,|^s\times<\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)>_\rho\times\pi\to$$
$$<\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)>_\rho\times St(\rho,a_0)|\,|^s\times<\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)>_\rho\times\pi$$

et pour $H_2(s)$ de l'opérateur d'entrelacement standard

$$M_2(s) := St(\rho, a_0)|\,|^{-s}\times <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times\pi \rightarrow$$

$$<\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times St(\rho, a_0)|\,|^{-s}\times <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times\pi.$$

Admettons que $M_1(s)$ et $M_2(s)$ sont holomorphes en $s = s_0$, ce que l'on démontrera à la fin de la preuve. On vérifie l'égalité suivante :

$$Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)} Im\, N_\psi(s_0, \rho, a_0, \pi) \circ H_1(s_0) = N_\psi(s, \rho, a_0, \pi)(St(\rho, a_0)|\,|^{s_0} \times \pi). \quad (2)$$

En effet, on montre d'abord que pour tout $x \in [\zeta(B+1), \zeta(A+1)]$, on a

$$Jac_{x,\cdots,\zeta(A+1)} St(\rho, a_0)|\,|^{s_0} \times \pi = 0. \quad (2)'$$

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi pour un x bien choisi. On rappelle que $St(\rho, a_0)|\,|^{s_0} =< A_0, \cdots, -\zeta_0 B_0 >_\rho$. On a $A_0 < A+1$, par hypothèse et il existe donc nécessairement $y \in [\zeta(B+1), \zeta(A+1)]$ avec $Jac_{y,\cdots,\zeta(A+1)}\pi \neq 0$. Mais ceci est impossible avec 8.1 puisque $Jord(\psi)$ ne contient pas d'élément (ρ, A', B', ζ') avec $\zeta' = \zeta$ et $B' \geq B+1 > B$ et $A' \geq A+1 > A$ car un tel élément est sûrement strictement supérieur à (ρ, A, B, ζ) et vérifie donc, d'après nos hypothèses générales, $B' >> A$.
On a donc montré que

$$Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)} N_\psi(s, \rho, a_0, \pi)\Big(<\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho \times St(\rho, a_0)|\,|^{s_0} \times \pi\Big)$$

$$= N_\psi(s, \rho, a_0, \pi)\Big(St(\rho, a_0)|\,|^{s_0} \times \pi\Big). \quad (3)$$

On vérifie aussi que

$$Jac_{\zeta(B+1),\cdots\zeta(A+1)} Im\, M_1(s_0) = St(\rho, a_0)|\,|^{s_0} \times \pi :$$

en effet dans l'opérateur d'entrelacement, il n'y a que le groupe GL portant les représentations induite $St(\rho, a_0)|\,|^{s_0}\times <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1)>_\rho$ qui intervient et $M_1(s_0)$ échange les 2 facteurs. Donc en tenant compte de (2)' l'égalité résulte du calcul des modules de Jacquet des induites.
D'où, par exactitude du foncteur de Jacquet, $Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)} Im\, N_\psi(s, \rho, a_0, \pi) \circ M_1(s_0)$ vaut (2).
On vérifie par les formules calculant le module de Jacquet des induites que

$$Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)} St(\rho, a_0)|\,|^{s} \times \pi_>$$

contient certainement l'induite $St(\rho, a_0)|\,|^{s_0} \times Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)}\pi_>$ vu comme élément du bon groupe de Grothendieck, c'est-à-dire l'induite $St(\rho, a_0)|\,|^{s_0} \times \pi$. Donc par exactitude du foncteur de Jacquet :

$$Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)}\Big(St(\rho, a_0)|\,|^{s_0}\times <\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1))>_\rho \times\pi / St(\rho, a_0)|\,|^{s_0}\times\pi_>\Big) = 0.$$

Et cela prouve (2), encore par exactitude du foncteur de Jacquet.
La conclusion est que, sous l'hypothèse que $M_1(s_0)$ et $M_2(s_0)$ sont holomorphes, on a montré, par la commutativité du diagramme :

$$N_\psi(s_0, \rho, a_0, \pi)\Big(St(\rho, a_0)|\,|^{s_0} \times \pi\Big) =$$

$$Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)} M_2(s_0) N_{\psi_>}(s_0,\rho,a_0,\pi_>)\Big(St(\rho,a_0)|\,|^{s_0}\times \pi_>\Big).$$

On montre comme ci-dessus que l'on peut enlever $M_2(s_0)$ dans la formule précédente et finalement

$$N_\psi(s_0,\rho,a_0,\pi)\Big(St(\rho,a_0)|\,|^{s_0}\times \pi\Big) =$$

$$Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)} N_{\psi_>}(s_0,\rho,a_0,\pi_>)\Big(St(\rho,a_0)|\,|^{s_0}\times \pi_>\Big). \tag{4}$$

Concluons pour obtenir (i) et (ii) sous les hypothèses d'holomorphie faites pour $M_i(s)$ pour $i=1,2$: si ψ^+ est défini comme dans (i), alors $\psi^+_>$ est aussi défini. On a donc défini π^+ et $\pi^+_>$. Par définition $\pi^+ = Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)}\pi^+_>$. Donc si le théorème est vrai pour $N_{\psi_>}(s_0,\rho,a_0,\pi_>)$, le membre de droite de (4) est exactement π^+ et (i) est donc vrai pour $N_\psi(s_0,\rho,a_0,\pi)$ et cela permet de terminer la récurrence de (i).
Supposons maintenant que $(\rho,a_0,b_0-2)\notin Jord(\psi)$; on veut, dans ce cas, simplement montrer que le membre de gauche de (4) est nul ou est une représentation irréductible, en admettant le même résultat pour

$$\tau := N_{\psi_>}(s_0,\rho,a_0,\pi_>)\Big(St(\rho,a_0)|\,|^{s_0}\times \pi_>\Big).$$

Si $\tau=0$, il n'y a évidemment pas de difficulté. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et il faut montrer que $Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)}\tau$ est soit nul soit est une représentation irréductible. On suppose que le module de Jacquet est non nul et par réciprocité de Frobenius on sait qu'il existe une représentation irréductible convenable σ et une inclusion

$$\tau \hookrightarrow \times_{c\in[\zeta(B+1),\zeta(A+1)]}\rho|\,|^c\times\sigma. \tag{5}$$

On sait aussi que τ est un sous-module de $St(\rho,a_0)|\,|^{s_0}\times\pi_>$. Donc en particulier pour tout $y\in]\zeta(B+1),\zeta(A+1)]$ la non nullité de $Jac_{y,\cdots,\zeta(A+1)}\tau$ entraîne la non nullité, pour un bon choix de $y'\in[y,\zeta(A+1)]$ de $Jac_{y',\cdots,\zeta(A+1)}\pi_>$ (par le fait que $A\geq A_0$). Ceci est impossible car $\zeta y' > B+1$ (cf. 8.1). Cela montre que (5) se factorise nécessairement via un sous-module

$$\tau \hookrightarrow <\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)>_\rho \times\sigma. \tag{6}$$

On calcule $Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)}\tau$ en utilisant cette inclusion. Le résultat est réduit à σ si pour tout $x\in[\zeta(B+1),\zeta(A+1)]$ on a $Jac_{x,\cdots,\zeta(A+1)}\sigma=0$. Mais s'il n'en est pas ainsi, par réciprocité de Frobenius pour un bon choix de représentation irréductible σ', on a encore une inclusion

$$\tau \hookrightarrow <\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)>_\rho \times_{c'\in[x,\zeta(A+1)]}\rho|\,|^{c'}\times\sigma'$$

$$\simeq \times_{c'\in[x,\zeta(A+1)]}\rho|\,|^{c'}\times <\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)>_\rho \times\sigma'.$$

Et on aurait encore $Jac_{x,\cdots,\zeta(A+1)}\tau\neq 0$ ce qui a été exclu. D'où l'irréductibilité cherchée qui conclut la récurrrence pour (ii).

Il reste donc à montrer les propriétés d'holomorphie pour $M_i(s)$ en $s=s_0$ pour $i=1,2$.
On commence par le cas où $\zeta=-$; dans ce cas $<-(B+1),\cdots,-(A+1)>_\rho$ est une série discrète tordue par le caractère $|\,|^{-(B+A)/2-1}$. En particulier $M_1(s)$ est holomorphe en $s=s_0$ par positivité : $(b_0-1)/2 > -(B+A)/2-1$. Le même argument vaut pour $M_2(s)$: en effet

$$-(b_0-1)/2 \geq -(a_0-1)/2-(b_0-1)/2 = -A_0 \geq -A \geq -(A+B)/2 > -(A+B)/2-1.$$

On considère maintenant les cas où $\zeta = +$; ici $< \zeta(B+1), \cdots, \zeta(A+1) >_\rho$ est une représentation de Speh. Donc l'induite

$$St(\rho, a_0)|\,|^{\pm s_0} \times < (B+1), \cdots, (A+1) >_\rho$$

est l'induite d'une série discrète tordue avec une représentation de Speh ; cela n'entre pas directement dans le cadre étudié par Zelevinsky mais on a étudie cette situation dans [23] I. Si $A_0 < B+1$, $M_1(s)$ est holomorphe en $s = s_0$ pour $i = 1, 2$ simplement parceque les opérateur d'entrelacement standard $\rho|\,|^x \times \rho|\,|^y \to \rho|\,|^y \times \rho|\,|^x$ (avec x, y au voisinage de $\mathbb{R}$) n'ont de pôles que sur la droite $x - y = 0$. On suppose donc que $A_0 \geq (B+1)$. On considère l'opérateur normalisé à la Langlands-Shahidi comme en [23] (on calculera le facteur de normalisation ci-dessous) associé à l'entrelacement $M_1(s)$; on le note $N_1(s)$. D'après [23] I.8, cet opérateur est holomorphe car $A_0 \geq B+1$ par hypothèse. Le facteur de normalisation est $L(St(\rho, a_0) \times \rho, s - (A+1))/L(St(\rho, a_0) \times \rho, s - B)$. En posant encore $s = (b_0 - 1)/2 + s'$ cela devient $L(\rho \times \rho, A_0 - (A+1) + s')/L(\rho \times \rho, A_0 - B)$. Avec nos hypothèses ce facteur de normalisation n'a ni pôle ni zéro en $s = s_0$.
Considérons maintenant le cas de $M_2(s)$; ici on a directement l'holomorphie si $\zeta_0 = -$ puisque $St(\rho, a_0)|\,|^{-s_0}$ est alors la représentation $< -B_0, \cdots, -A_0 >_\rho$. Supposons que $\zeta_0 = +$, ici $St(\rho, a_0)|\,|^{-s_0} = < B_0, \cdots, -A_0 >_\rho$. On a donc directement l'holomorphie cherchée si $B_0 < B+1$. Si $B_0 \geq B+1$, on a l'holomorphie de l'opérateur d'entrelacement normalisé avec la même référence. Le facteur de normalisation est ici

$$\frac{L(St(\rho, a_0) \times \rho, -s - (A+1))}{L(St(\rho, a_0) \times \rho, -s - B)} = \frac{L(\rho \times \rho, B_0 - (A+1) - s')}{L(\rho \times \rho, B_0 - B - s')}.$$

Or on a supposé que l'on est dans le cas où $B < B_0$ et $A_0 \leq A$; de plus comme $\zeta_0 = +$, on a aussi $a_0 \geq b_0 \geq 2$ d'où aussi $B_0 < A_0$, d'où $B < B_0 < A_0 \leq A$. Le facteur de normalisation est donc encore holomorphe inversible en $s' = 0$. Cela termine la preuve.

5 Généralisation

Il y a plusieurs généralisations à faire ; enlever l'hypothèse de bonne parité pour ψ, prendre aussi en compte le fait que la conjecture de Ramanujan n'est pas connue et remplacer la série discrète $St(\rho, a_0)$ considérée jusqu'à présent par une composante en la place p-adique fixée d'une représentation cuspidale unitaire quelconque.
D'abord on considère un morphisme ψ général, c'est-à-dire contenant des sous-représentations irréductibles de $W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ qui soit ne sont pas autoduales soit ne se factorisent pas par un groupe de même type que le groupe dual de G et on va aussi ajouter des représentations non unitaires qui se doivent d'intervenir si la conjecture de Ramanujan n'est pas vérifiée. On note ψ_{bp} la somme des sous-représentations de ψ qui sont autoduales et se factorisent par un sous-groupe de même type que le dual de G, ψ_{mp} la somme des représentations irréductibles unitaires qui ne se factorisent pas par un groupe de même type que G et ψ_{nu} la somme des représentations non unitaires. On peut préciser un peu ψ_{nu}. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note ψ_x la somme des sous-représentations irréductibles incluses dans ψ sur lesquelles W_F agit par une représentation de déterminant $|\,|^x$. Pour les paquets d'Arthur, on peut (et on le fait) se limiter aux ψ_{nu} tels que $\psi_x = 0$ sauf éventuellement pour $|x| \in]0, 1/2[$. De plus ψ étant autodual, on a nécessairement $\psi_x \simeq (\psi_{-x})^*$. On note $\psi_{nu,>0} := \sum_{x \in]0,1/2[} \psi_x$. On découpe aussi ψ_{mp} en une somme de sous-représentations $\psi_{1/2,mp} \oplus \psi_{-1/2,mp}$ avec $\psi_{1/2,mp} \simeq \psi^*_{-1/2,mp}$ (cf. 2.2). On a déjà expliqué comment les travaux de Bernstein-Zelevinsky et la preuve de la conjecture de Langlands permettent d'associer une représentation irréductible d'un groupe GL convenable à toute

représentation irréductible de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ en loc. cite. En induisant pour passer au cas des représentations semi-simples, on associe une représentation d'un GL convenable à $\psi_{1/2,mp}$ et $\psi_{nu,>0}$ que l'on note $\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})$ et $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})$.
Le paquet de représentations associé à ψ est alors exactement l'ensemble des sous-quotients irréductibles inclus dans les induite $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0}) \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{bp}$ où ψ_{bp} parcourt l'ensemble des représentations dans le paquet associé à ψ_{bp}. On a montré en [18] 3.2 que les induites $\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{bp}$ sont irréductibles pour les groupes que l'on considère. Et on a représenté cette induite comme sous-module de Langlands convenable. On généralisera ces résultats à l'induction par $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})$.
On définit encore $Jord(\psi)$ en utilisant une décomposition de ψ en sous-représentations irréductibles ; pour ne pas modifier les notations déjà utilisées, on écrit $Jord(\psi)$ sous forme de triplets $(\rho', a', b')_x$ où $x \in \mathbb{R}$ et où ρ' est une représentation unitaire de W_F et a', b' sont des entiers représentant la dimension des représentations irréductibles $sp_{a'}$, $sp_{b'}$ de $SL(2,\mathbb{C})$. La représentation correspondante est $\rho'|\,|^x \otimes sp_{a'} \otimes sp_{b'}$. Et on peut oublier x si $x = 0$.
Il faut aussi généraliser $St(\rho, a_0)$ en une représentation irréductible τ qui est unitaire, a un modèle de Whittaker et s'écrit donc comme induite $\times_{(\rho',a',x') \in \mathcal{J}} St(\rho', a')|\,|^{x'}$ et on impose aux x' intervenant de vérifier $x' \in]-1/2, 1/2[$. Ce sont des propriétés qu'ont toutes les composantes locales des représentations cuspidales des groupes GL.

5.1 Description des représentations dans les paquets d'Arthur généraux

Soit ψ un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le groupe dual de G ; on le suppose semi-simple mais on ne le suppose plus tout à fait unitaire, on fait l'hypothèse de l'introduction de cette section. On reprend les notations $\psi_{nu,>0}, \psi_{nu,<0}, \psi_{mp}, \psi_{\pm 1/2,mp}, \psi_{bp}$ que l'on a déjà introduites.
En utilisant la correspondance de Langlands, on sait définir les représentations $\pi^{GL}(\psi)$, $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})$, $\cdots$ et l'on a

$$\pi^{GL}(\psi) \simeq \pi^{GL}(\psi_{nu}, > 0) \times \pi^{GL}(\psi_{nu}, < 0) \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi^{GL}(\psi_{-1/2,mp}) \times \pi^{GL}(\psi_{bp}), \quad (1)$$

cette induite étant irréductible.
Pour (ρ, a, b) un triplet définissant une représentation irréductible de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$, on introduit encore une notation, pour tout y tel que $y + (b-1)/2 \in \mathbb{N}$, $J(St(\rho, a), -(b-1)/2, y)$ est l'unique sous-module irréductible de l'induite, pour le GL convenable :

$$St(\rho, a)|\,|^{-(b-1)/2} \times \cdots \times St(\rho, a_0)|\,|^y;$$

c'est le sous-module de Langlands de l'induite ci-dessus. Pour b un entier, on pose $\delta_b = 0$ si b est impair et $1/2$ si b est pair et $\delta'_b = 1$ si b est impair et $1/2$ si b est pair. Dans tous les cas, on a $[-(b-1)/2, (b-1)/2] = [-(b-1)/2, -\delta_b] \cup [\delta'_b, (b-1)/2]$ et c'est pour avoir ce découpage que l'on a introduit ces notations compliquées.
On rappelle que l'on a montré en [18] 3.2 que l'induite $\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})_{bp}$ est irréductible pour toute représentation irréductible π_{bp} dans le paquet de représentations associé à ψ_{bp}.

Proposition *Avec les notations ci-dessus, pour tout π_{bp} dans le paquet de représentations associées à ψ_{bp} l'induite $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0}) \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi$ est irréductible et c'est l'unique sous-module irréductible de l'induite :*

$$\times_{(\rho,a,b)_x \in Jord(\psi_{nu,<0}), b>1} J(St(\rho, a), -(b-1)/2, -\delta'_b)|\,|^x \times J(St(\rho^*, a), -(b-1)/2, -\delta_b))|\,|^{-x}$$

$$\times_{(\rho,a,b)_x \in Jord(\psi_{nu,<0}); b \equiv 1[2]} St(\rho, a)|\,|^x \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{bp};$$

On commence par expliquer pourquoi on n'a pas mis d'ordre dans les inductions ci-dessus : l'induite

$$\times_{(\rho,a,b)_x \in Jord(\psi_{nu,<0}), b>1} J(St(\rho,a), -(b-1)/2, -\delta_b)|\,|^x \times J(St(\rho, a, -(b-1)/2, -\delta'_b))|\,|^{-x}$$

pour le GL convenable est irréductible : en [23] I.9 on a démontré que l'induite

$$J(St(\rho,a), -(b-1)/2, y)|\,|^z \times J(St(\rho',a'), -(b'-1)/2, -y')|\,|^{z'}$$

est irréductible si l'une des 3 conditions suivantes est réalisée : $\rho \not\simeq \rho'$, $(a+b)/2+x-(a'+b')/2-x' \notin \mathbb{Z}$ ou $|y+z-y'-z'|<1$. Or on a, avec les notations introduites $-\delta_b+x \in]-1,0[$ car $x\in]-1/2,0[$ et $-\delta_b$ vaut 0 ou -1 et $-\delta'_b - x \in]-1,0[$ car $-x \in]0,1/2[$ et $-\delta'_b = -1$ ou $-1/2$. Donc l'équivalent de $y+z-y'-z'$ est de la forme $t-t'$ avec $t,t' \in]-1,0[$, d'où $|t-t'| \in [0,1[$ et la troisième condition est toujours vérifiée.

On note $\pi := \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{bp}$, on sait que c'est une représentation irréductible comme on vient de le rappeler. On montre d'abord que $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0}) \times \pi$ est irréductible. On montre qu'une telle représentation a un unique sous-module irréductible, que l'on note σ et que σ intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient de l'induite : en effet, on note d la dimension de la représentation $\psi_{nu,>0}$ et on calcule le module de Jacquet de l'induite $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0}) \times \pi$ le long du radical unipotent d'un parabolique standard de Levi $GL(d) \times G'$ où G' est un groupe classique de même type que G. Dans ce module de Jacquet, on ne conserve que les sous-représentations irréductibles dont le support cuspidal pour l'action de $GL(d)$ est le même que celui de la représentation $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})$. Il ne reste plus que la représentation irréductible $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0}) \otimes \pi$. Soit σ une sous-représentation irréductible de l'induite. Par réciprocité de Frobenius le module de Jacquet de σ doit contenir cette représentation irréductible et comme cette représentation n'intervient qu'avec multiplicité 1 dans le module de Jacquet de toute l'induite, σ est unique et a multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible. On démontre de la même façon que l'induite a un unique quotient irréductible et qu'un tel quotient intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible de l'induite : ici il suffit de dualiser pour se ramener à une assertion où quotient est remplacé par sous-module. En dualisant on change $\psi_{nu,>0}$ en $\psi_{nu,<0}$ et on change éventuellement π mais par un automorphisme que l'on contrôle (cf. [21], II.1) et la méthode est la même. On note τ ce quotient irréductible. On remarque pour la suite que le module de Jacquet de τ contient nécessairement $\pi^{GL}(\psi_{nu,<0}) \otimes \pi$.

On montre que l'induite $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0}) \times \pi$ est isomorphe à l'induite $\pi^{GL}(\psi_{nu,<0}) \times \pi$ en construisant l'isomorphisme avec des opérateurs d'entrelacement : en écrivant $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})$ sous la forme $\pi_1 \times \pi_\ell$, chaque π_i étant une représentation de la forme $Speh(St(\rho',a'),b')|\,|^{x'}$ et $\pi^{GL}(\psi_{nu,<0})$ est écrit $\pi_\ell^* \times \cdots \times \pi_1^*$ et l'opérateur d'entrelacement est celui qui correspond à l'élément du groupe de Weyl de longueur minimal qui conjugue les représentations de la façon suggérée par les notations. On va vérifier que pour tout $i \in [1,\ell]$ les opérateurs d'entrelacement standard $\pi_i \times \pi \rightarrow \pi_i^* \times \pi$ sont holomorphes bijectifs. Avec les références déjà donnée, on sait que pour $i,j \in [1,\ell]$ les induites $\pi_j \times \pi_i^*$ sont irréductibles et on aura ainsi l'isomorphisme cherché. Pour vérifier l'affirmation précédente, on écrit π_i à l'aide des segments de Zelevinsky :

$$\pi_i = \left\langle \begin{matrix} (a'-b')/2+x' & \cdots & (a'+b')/2-1+x' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(a'+b')/2+1+x' & \cdots & -(a'-b')/2+x' \end{matrix} \right\rangle_{\rho'}$$

où les lignes sont des segments croissants et les colonnes des segments décroissants (cf. 2.1.3). On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des coefficients de la matrice écrite, ensemble que l'on ordonne en lisant d'abord de gauche à droite puis de haut en bas. Soit $z \in \mathcal{E}$; on note $\mathcal{E}_{<z}$ les éléments de $\mathcal{E}$ à la gauche de z (pour l'ordre) et $\mathcal{E}_{>z}$ ceux à la droite de z ; aucun de ces ensembles ne contient z. Dans la notation ci-dessous *opp* veut dire que l'on inverse l'ordre et l'on regarde l'opérateur

$$\times_{z'\in\mathcal{E}_{<z}}\rho'|\,|^{z'}\times\rho'|\,|^{z}\times_{z''\in\mathcal{E}_{>z}^{opp}}\rho^{*'}|\,|^{-z''}\times\pi\to\times_{z'\in\mathcal{E}_{<z}}\rho'\times_{z''\in\mathcal{E}_{>z}^{opp}}\rho^{*'}|\,|^{-z''}\times\rho'|\,|^{z}\times\pi;$$

il est holomorphe et inversible ; c'est quasi automatique si $\rho\not\simeq\rho^*$ mais l'argument général, qui vaut dans tous les cas, est que pour tout $z''\in\mathcal{E}_{>z}$ $z+z''\notin 1/2\mathbb{Z}$. Ensuite on vérifie que l'opérateur $\rho'|\,|^z\times\pi\to\rho^{*'}|\,|^{-z}\times\pi$ est holomorphe inversible et ici c'est le fait que z n'est pas un demi-entier qui sert (cf. la remarque ci-dessous). Finalement on montre que l'opérateur

$$\times_{z'\in\mathcal{E}_{<z}}\rho'|\,|^{z'}\times\rho'|\,|^{z}\times_{z''\in\mathcal{E}_{>z}^{opp}}\rho^{*'}|\,|^{-z''}\times\pi\to\times_{z'\in\mathcal{E}_{<z}}\rho'\times_{z''\in\mathcal{E}_{>z}^{opp}}\rho^{*'}|\,|^{-z''}\times\rho^{'*}|\,|^{-z}\times\pi$$

est holomorphe inversible. Ainsi en restreignant cet opérateur à $\pi_i\times\pi$ on obtient l'assertion cherchée. Ensuite on conclut facilement à l'isomorphisme cherché. Ainsi σ est aussi un sous-module irréductible de $\pi^{GL}(\psi_{\nu,<0})\times\pi$ et son module de Jacquet contient donc aussi $\pi^{GL}(\psi_{\nu,<0})\otimes\pi$. Comme ce module de Jacquet était nécessairement dans celui de τ et comme il n'intervient qu'avec multiplicité 1 dans le module de Jacquet de toute l'induite, nécessairement $\tau\simeq\sigma$. D'où l'irréductibilité cherchée.

Montrons maintenant la 2e partie de la proposition. Soit $(\rho,a,b)_x\in Jord(\psi_{nu,<0})$. On vient sait par définition et avec les notations introduites avant l'énoncé que

$$Speh(St(\rho,a),b)|\,|^x\hookrightarrow J(St(\rho,a),-(b-1)/2-\delta_b)\times J(St(\rho,a),\delta'_b,(b-1)/2).$$

Comme ci-dessus, on vérifie que

$$J(St(\rho,a),\delta'_b,(b-1)/2)|\,|^x\times\pi\simeq J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x}\times\pi.$$

Soit $(\rho',a',b')_{x'}\in Jord(\psi_{nu,<0})$, par définition $Speh(St(\rho',a'),b')|\,|^{x'}=J(St(\rho',a'),-(b'-1)/2,(b'-1)/2)|\,|^{x'}$. On a introduit une condition de segments liés de [23] 1.7 qui généralise celle de Zelevinsky pour ce genre de représentation et qui assure l'irréductibilité de l'induite $Speh(St(\rho',a'),b')|\,|^{x'}\times J(St(\rho,a),-(b-1)/2,y)|\,|^{\tilde{x}}$. Supposons que $b'\geq b$, on a alors $-(b'-1)/2\leq-(b-1)$ et $y\leq(b'-1)/2$ et encore $y+\tilde{x}<(b'-1)/2+x'+|(a-a')/2|+1$ tandis que $-(b'-1)/2+x'<-(b-1)/2+\tilde{x}+|(a-a')/2|+1$ et les segments ne sont donc pas liés. Donc ainsi

$$Speh(St(\rho,a'),b')|\,|^{x'}\times Speh(St(\rho,a),b)|\,|^{x}\times\pi\hookrightarrow$$

$$Speh(St(\rho,a'),b')|\,|^{x'}\times J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^{x}\times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x}\times\pi$$

$$\simeq J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^{x}\times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x}\times Speh(St(\rho,a'),b')|\,|^{x'}\times\pi$$

$$\hookrightarrow J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^{x}\times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x}$$

$$\times J(St(\rho',a'),-(b'-1)/2,-\delta'_{b'})|\,|^{x'}\times J(St(\rho^{'*},a'),-(b'-1)/2,-\delta'_{b'})|\,|^{-x'}\times\pi.$$

On peut ensuite continuer avec plus de 2 facteurs et obtenir l'inclusion de l'énoncé. Le fait que l'induite de droite a un unique sous-module irréductible vient du fait que l'on peut remplacer l'induite des représentations $J(\cdots)$ par une induite de représentation de Steinberg tordu, les exposants étant dans la chambre de Weyl fermé négative ; c'est l'argument de [19] 3.6, lemme 1 qui repose encore une fois sur [23] I.9. Cela termine la preuve.

Remarque 1 *Avec les notations précédentes, pour ρ' une représentation cuspidale unitaire d'un groupe GL et pour $x \in \mathbb{R} - 1/2\mathbb{Z}$, l'opérateur d'entrelacement standard*

$$M(\rho, x) : \rho'| |^x \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{bp} \to \rho'^*| |^{-x} \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{bp}$$

est holomorphe et le composé $M(\rho', -x) \circ M(\rho, x)$ est un scalaire non nul. En particulier ces induites sont irréductibles.

Le support cuspidal de $\times\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})\times\pi_{bp}$ est de la forme une collection de représentations cuspidales de GL, de la forme $\rho| |^c$ avec ρ une représentation cuspidale unitaire d'un GL et c un élément de $1/2\mathbb{Z}$ et d'une représentation cuspidale π_{cusp} d'un groupe classique de même type que G. On peut écrire

$$\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{bp} \hookrightarrow \times_{(\rho,c)\in\mathcal{E}}\rho| |^c \times \pi_0, \tag{1}$$

où $\mathcal{E}$ est un ensemble totalement ordonné convenable. On sait que pour tout $(\rho, c) \in \mathcal{E}$ l'opérateur d'entrelacement standard qui échange les 2 facteurs de l'induite $\rho'| |^x \times \rho| |^c$ est holomorphe pour $x - c \neq 0$ ainsi que l'opérateur d'entrelacement standard

$$\rho'| |^x \times \pi_0 \to \rho'^*| |^{-x} \times \pi_0$$

en $x \neq 0$ et l'opérateur qui échange les 2 copies de $\rho| |^c \times \rho'^*| |^{-x}$ en $x + c \neq 0$ par les résultats généraux d'Harish-Chandra. D'où de façon évidente l'holomorphie de l'opérateur d'entrelacement standard décrit dans l'énoncé. On sait aussi que $M(\rho'^*, -x) \circ M(\rho, x)$ est un scalaire.
Pour le calculer on peut encore utiliser l'inclusion (1) et décomposer en opérateur élémentaire ; on vérifie que chaque induite $\rho'| |^x \times \rho| |^c$, $\rho'| |^x \times \pi_0$, $\rho| |^c \times \rho'^*| |^{-x}$ est irréductible car $x \notin 1/2\mathbb{Z}$. Le composé des opérateurs d'entrelacement décrit est donc une bijection et le scalaire ne peut être 0. Cela entraîne que l'opérateur $M(\rho', x)$ est bijectif, d'inverse $M(\rho'^*, -x)$. Par un calcul de module de Jacquet, on vérifie que l'induite $\rho'| |^x \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})\times\pi_{pb}$ a un unique sous-module irréductible : le terme $\rho'| |^x \otimes \Big(\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{pb}\Big)$ arrive avec multiplicité 1 dans le module de Jacquet de l'induite et que ce sous-module irréductible a multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible. En dualisant, on vérifie que ce sous-module irréductible est aussi l'unique quotient irréductible de l'induite $\rho'^*| |^{-x} \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{pb}$. Par la bijectivité de $M(\rho', x)$, cela entraîne l'irréductibilité cherchée et la remarque.

Remarque 2 *Avec les notations précédentes, l'induite*

$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp})}J(St(\rho, a), -(b-1)/2, -\delta_b) \times J(St(\rho, a), -(b-1)/2, -\delta'_b) \times \pi_{bp}$$

a un unique sous-module irréductible et ce sous-module est l'induite $\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{bp}$.

En [18] 3.2, on a établi l'irréductibilité de $\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})\times\pi_{bp}$. Comme le module de Jacquet de cette induite contient le terme

$$\Big(\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp})}J(St(\rho, a), -(b-1)/2, -\delta_b) \times J(St(\rho, a), -(b-1)/2, -\delta'_b)\Big) \otimes \pi_{bp}$$

la représentation $\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{bp}$ est un sous-module irréductible de l'induite écrite. Montrons que cette induite a un unique sous-module irréductible ; avec [23] I.8, on peut échanger les facteurs comme on veut et on écrit cette induite sous la forme

$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp});b\equiv 0[2]}J(St(\rho, a), -(b-1)/2, -1/2) \times J(St(\rho, a), -(b-1)/2, -1/2))$$

$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp}),b\equiv 1[2]} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-1)$$
$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp});b\equiv 0[2]} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,0)\times\pi_{bp}.$$

Or $J(St(\rho,a),-(b-1)/2,0)\hookrightarrow J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-1)\times St(\rho,a)$; en le faisant progressivement, on peut encore remplacer la ligne ci-dessus par une inclusion dans l'induite

$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp}),b\equiv 1[2]} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-1)\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp});b\equiv 1[2]} St(\rho,a)\times\pi_{bp}.$$

Cela inclut l'induite de l'énoncé dans l'induite

$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp})} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp}),b\equiv 1[2]} St(\rho,a)\times\pi_{bp}.$$

L'induite $\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp}),b\equiv 1[2]} St(\rho,a)\times\pi_{bp}$ est irréductible par [18] 3.2 et toute l'induite écrite ci-dessus contient dans son module de Jacquet le terme

$$\left(\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp})} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)\right)\otimes\left(\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp}),b\equiv 1[2]} St(\rho,a)\times\pi_{bp}\right)$$

avec multiplicité 1. Cela prouve l'unicité du sous-module irréductible cherché ; ce sous-module irréductible est le sous-quotient de Langlands (bien défini, quand on remplace π_{bp} par l'induite avec les paramètres de Langlands de π_{bp}).

5.2 Propriétés d'holomorphie des opérateurs d'entrelacement normalisés

On fixe ψ un morphisme de $W_F\times SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ comme dans 5.1, c'est-à-dire que $\psi=\psi_{nu}\oplus\psi_{mp}\oplus\psi_{bp}$. On fixe aussi une représentation τ qui joue le rôle de la composante locale d'une forme automorphe cuspidale, autoduale d'un groupe GL. On suppose donc que τ est unitaire et a un modèle de Whittaker avec la propriété de l'introduction de cette section.

Pour $s\in\mathbb{C}$, on a défini la fonction méromorphe, qui utilise des facteurs L pour des groupes linéaires

$$r(s,\tau,\psi):=\frac{L(\tau\times\pi^{GL}(\psi),s)}{L(\tau\times\pi^{GL}(\psi),s+1)}\frac{L(\tau,r_G,2s)}{L(\tau,r_G,2s+1)}.$$

Soit π dans le paquet de représentations associé à ψ. On considère l'opérateur d'entrelacement standard, pour tout $s\in\mathbb{C}$:

$$M(s,\tau,\pi):\quad \tau|\,|^s\times\pi\to\tau^*|\,|^{-s}\times\pi;$$

il est associé à l'élément du groupe de Weyl de G, de longueur minimale dans sa double classe modulo le groupe de Weyl du parabolique maximal. Et on pose $N_\psi(s,\tau,\pi):=r(s,\tau,\psi)^{-1}\times M(s,\tau,\pi)$.

Proposition *L'opérateur $N_\psi(s,\tau,\pi)$ est holomorphe en tout $s\in\mathbb{R}_{>0}$.*

On fixe π_{bp} dans le paquet associé à ψ_{bp} avec les notations de 5.1 de tel sorte que $\pi\simeq\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})\times\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})\times\pi_{bp}$. On décompose l'opérateur d'entrelacement en le produit des opérateurs d'entrelacement suivant :

$$\tau|\,|^s\times\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})\times\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})\to\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})\times\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})\times\tau|\,|^s;\qquad(1)$$

$$\tau|\,|^s\times\pi_{bp}\to\tau^*|\,|^{-s}\times\pi_{bp};\qquad(2)$$

$$\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})\times\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})\times\tau^*|\,|^{-s}\to\tau^*|\,|^{-s}\times\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})\times\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp});\qquad(3)$$

où le 1e et le 3e opérateur sont situés dans des groupes GL convenables. On pose $\sigma := \pi^{GL}(\psi_{nu,>0}) \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})$ et on sait que $\sigma^* \simeq \pi^{GL}(\psi_{nu,<0}) \times \pi^{GL}(\psi_{-1/2,mp})$ puisque ψ est à valeurs dans le groupe dual de G.
On utilise la décomposition de 5.1 (1) pour décomposer $L(\tau \times \pi^{GL}(\psi), s)/L(\tau \times \pi^{GL}(\psi), s+1)$ en le produit des 3 facteurs ci-dessous. Pour simplifier l'écriture on pose $\sigma := \pi^{GL}(\psi_{nu,>0}) \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})$ et on utilise le fait que $\sigma^* \simeq \pi^{GL}(\psi_{nu,<0}) \times \pi^{GL}(\psi_{-1/2,mp})$. On a donc : $L(\tau \times \pi^{GL}(\psi), s)/L(\tau \times \pi^{GL}(\psi), s+1) =$

$$L(\tau \times \sigma^*, s)/L(\tau \times \sigma^*, s+1) \tag{4}$$

$$\times L(\tau \times \pi^{GL}(\psi_{bp}), s)/L(\tau, \times \pi^{GL}(\psi_{bp}), s+1) \tag{5}$$

$$\times L(\tau \times \sigma, s)/L(\tau \times \sigma, s+1). \tag{6}$$

L'opérateur d'entrelacement (1) normalisé par la fonction (4), est exactement l'opérateur d'entrelacement étudié dans [23] I.2 et il en est de même de (3) normalisé par (6). On vérifie que l'hypothèse de [23] I.8 est satisfaite de façon à tirer de cette référence l'holomorphie : on se place en $s \in \mathbb{R}_{>0}$ et l'hypothèse en question est que les modules de Speh qui définissent la représentation $\tau|\,|^s$ (resp. σ) dominent ceux qui définissent la représentation σ (resp. $\tau^*|\,|^{-s}$) pour l'opérateur (1) (resp. (3)) ou ne sont pas liés. Faisons le pour l'opérateur (1) : la représentation τ est une induite de $St(\rho'', c)|\,|^{x+s}$ avec $x \in]-1/2, 1/2[$ donc de la forme $Speh(St(\rho'', c), 1)|\,|^{x+s}$. Ceux qui définissent σ sont de la forme $Speh(St(\rho''', a), b)|\,|^z$ avec $z \in]-1/2, 1/2[$; donc on a $x + s - z > -1$ et si les segments sont liés, ce nombre est ≥ 0 ainsi le premier domine le second (cf. loc.cite). Pour l'opérateur (3), on a $z + s - x$ qui a la même propriété. D'où l'holomorphie des opérateurs (1) et (3) normalisés.
Il reste l'opérateur (2) normalisé par la fonction que l'on est en droit d'écrire $r(s, \tau, \psi_{bp})$. Ici on écrit $\tau \simeq \times_{(\rho', a', x') \in \mathcal{J}} St(\rho', a')|\,|^{x'}$ où $\mathcal{J}$ est un ensemble, totalement ordonné, de triplets formés d'une représentation cuspidale unitaire, d'un entier et d'un nombre réel. La fonction $r(s, \tau, \psi_{bp})$ se décompose de façon analogue en produit. L'opérateur d'entrelacement s'écrit ainsi, après avoir fixé l'isomorphisme de τ avec l'induite écrite :

$$\times_{(\rho', a', x') \in \mathcal{J}} St(\rho', a')|\,|^{x'+s} \times \pi_{bp} \to \times_{(\rho', a', x') \in \mathcal{J}^{opp}} St(\rho'^*, a)|\,|^{-x'-s} \times \pi_{bp},$$

où l'exposant *opp* signifie que l'ordre sur $\mathcal{J}$ a été inversé. Donc il faut donc démontrer l'assertion quand $\mathcal{J}$ est réduit à un élément c'est-à-dire quand $\tau \simeq St(\rho', a')|\,|^{x'}$ avec $x' \in]-1/2, 1/2[$. On a démontré l'assertion d'holomorphie en [20] dans le cas où $s + x' \geq 0$ et ρ' est autodual. Si si $s + x' \notin 1/2\mathbb{Z}$, on a prouvé l'holomorphie dans la remarque de 5.1 ; la preuve donnée en loc.cite s'applique aussi au cas où ρ' n'est pas autoduale puisqu'ici la représentation du groupe classique est π_{bp}, associé à des triplets de bonne parité donc avec une représentation cuspidale qui, elle, est autoduale. On couvre ainsi tous les cas puisque pour $s \geq 0$, $s + x' > -1/2$ par hypothèse sur x'. Cela termine la preuve de l'holomorphie.

5.3 Image des opérateurs d'entrelacement normalisés

On reprend les notations τ, ψ, π de 5.2. On a défini en loc.cite l'opérateur d'entrelacement $N_\psi(s, \tau, \pi)$ et montré son holomorphie pour tout $s \in \mathbb{R}_{>0}$.
On va décrire l'image ; dans le cas général le résultat est purement qualitatif, on veut montrer que l'image est nulle ou irréductible ; on le fera sous l'hypothèse que $s \geq 1/2$, vue nos hypothèses cette condition est nécessaire pour avoir l'irréductibilité : en effet, fixons ρ tel que l'induite $\rho \times \pi$ est réductible (il y a de nombreux exemples) et posons $\tau = \rho|\,|^{-x} \times \rho|\,|^x$ avec $x \in]0, 1/2[$. Alors en $s = x$ l'opérateur d'entrelacement n'a aucun raison d'avoir une image irréductible.

5.3.1 Description qualitative de l'image

Proposition *L'image de $N_\psi(s,\tau,\pi)$ en $s=s_0\in\mathbb{R}_{\geq 1/2}$ est soit identiquement 0, soit est une représentation irréductible.*

On écrit $\tau|\,|^{s_0}$ comme induite irréductible et pour fixer les notations les plus simples possibles, on écrit :

$$\tau|\,|^{s_0}\simeq\times_{(\rho',a',s')\in\mathcal{J}}St(\rho',a')|\,|^{s'};$$

ici on sait que $s'>0$. On ordonne $\mathcal{J}$ de telle sorte que les premiers facteurs sont ceux pour lesquels $s'\notin 1/2\mathbb{Z}$ et les derniers ont la propriété opposée. D'où en regroupant ces 2 types de facteurs, $\tau|\,|^{s_0}\simeq\tau_{ne}\times\tau_e$, ne pour non demi-entier et e pour demi-entier. On écrit $\pi=\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})\times\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})\times\pi_{bp}$ avec les notations de 5.1. On note π_0 l'image de l'opérateur d'entrelacement normalisé :

$$\tau_e\times\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})\times\pi_{bp}\to\tau_e^*\times\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp})\times\pi_{bp}.$$

Comme le support cuspidale de $\pi^{GL}(\psi_{nu,<0})$ et celui de π_e n'ont pas les mêmes propriétés d'intégralité les opérateurs d'entrelacement qui échange ces facteurs sont des isomorphismes qu'on les normalise ou pas. Cela entraîne que l'image cherchée n'est autre que l'image de l'opérateur d'entrelacement normalisé par $r(s,\tau_{ne},\psi)$ de l'opérateur d'entrelacement :

$$\tau_{ne}\times\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})\times\pi_0\to\tau_{ne}^*\times\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})\times\pi_0.$$

En particulier si $\pi_0=0$ l'image cherchée est nulle ; supposons donc que $\pi_0\neq 0$; on admet pour le moment que π_0 est soit nul soit irréductible. On conclut avec l'hypothèse que π_0 est irréductible.
L'argument, dont on donne les détails ci-dessous, est que le terme de gauche a un unique quotient irréductible et que celui de droite a un unique sous-module irréductible que ces 2 représentations sont isomorphes et interviennent avec multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible des induites écrites. Cela force le fait que tout morphisme non nul entre les 2 induites est d'image irréductible. Et prouve l'assertion. La démonstration sera réutilisée en 5.3.2 car elle donne une bonne description de l'image une fois la représentation π_0 connue.
En généralisant 5.1, on montre que $\pi^{GL}(\psi_{nu,>0})\times\pi_0$ est l'unique sous-module irréductible de l'induite (avec les notations de loc. cite)

$$\times_{(\rho,a,b)_x\in Jord(\psi_{nu,<0})}J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x\times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x}\times\pi_0.$$

On vérifie que $\tau_{ne}^*\times_{(\rho,a,b)_x\in Jord(\psi_{nu,<0})}J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x\times J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x}$ est le sous-module de Langlands de l'induite (cf. [19] 3.6 lemme 1, où l'argument a été détaillé). Avec cela il est simple de montrer l'unicité du sous-module irréductible de l'induite comme annoncé, ainsi que sa multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible ; d'après cette description, on a les paramètres de Langlands de ce sous-module en fonction de ceux de π_0.
Avec les mêmes arguments, ou plus simplement en dualisant on montre que π est l'unique quotient irréductible de l'induite

$$\times_{(\rho,a,b)_x\in Jord(\psi_{nu,>0})}J(St(\rho,a),\delta_b,(b-1)/2)|\,|^x\times J(St(\rho^*,a),\delta'_b,(b-1)/2)|\,|^{-x}\times\pi_0.$$

Et que $\tau_{ne}\times\pi$ est le quotient de Langlands de l'induite $\tau_{ne}\times$ l'induite que l'on vient d'écrire. D'où l'unicité du quotient irréductible, c'est le quotient de Langlands et il a les mêmes paramètres de Langlands que le sous-module décrit précédemment. Cela suffit pour la proposition.

Pour la suite, on veut vérifier que l'opérateur est non nul si $\pi_0 \neq 0$: il suffit de montrer que l'opérateur d'entrelacement (les $(\rho,a,b)_x$ parcourt $Jord(\psi_{nu,<0})$ ce que l'on n'a pas la place d'écrire ci-dessous)

$$\tau_{ne}|\,|^{s'} \times_{(\rho,a,b)_x} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x \times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x} \times \pi_0$$
$$\rightarrow$$
$$\tau^*_{ne}|\,|^{-s'} \times_{(\rho,a,b)_x} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x \times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x} \times \pi_0$$

normalisé par la fonction $r(\psi,\tau_{ne},s')$ est non nul en $s'=0$ (on a déjà pris en compte s_0 pour définir τ_{ne}). On peut encore remplacer $r(s',\tau_{ne},\psi)$ par $r(s',\tau_{ne},\psi_{nu})$ car ces fonctions ont le même ordre en $s'=0$. On décompose cet opérateur en le produit de l'opérateur d'entrelacement standard (qui est holomorphe par positivité)

$$\tau_{ne}|\,|^{s'} \times_{(\rho,a,b)_x} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x \times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x} \times \pi_0$$
$$\rightarrow$$
$$\times_{(\rho,a,b)_x} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x \times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x} \times \tau^*_{ne}|\,|^{-s'} \times \pi_0$$

avec l'opérateur d'entrelacement

$$\times_{(\rho,a,b)_x} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x \times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x} \times \tau^*_{ne}|\,|^{-s'} \times \pi_0$$
$$\rightarrow$$
$$\tau^*_{ne}|\,|^{-s'} \times_{(\rho,a,b)_x} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x \times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x} \times \pi_0$$

Le premier est non nul car c'est un opérateur d'entrelacement standard holomorphe et son image n'annule pas le sous-quotient de Langlands. Donc il suffit de montrer que le 2e opérateur d'entrelacement n'annule pas non plus le sous-quotient de Langlands et à ce point, il suffit de montrer qu'il est non nul puisque le sous-quotient de Langlands est l'unique sous-module irréductible de l'induite d'arrivée. Or cet opérateur est purement un opérateur dans un GL, c'est l'opérateur

$$\times_{(\rho,a,b)_x} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x \times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x} \times \tau^*_{ne}|\,|^{-s'}$$
$$\rightarrow$$
$$\tau^*_{ne}|\,|^{-s'} \times \times_{(\rho,a,b)_x} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x \times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x}$$

normalisé comme expliqué. Il n'y a plus qu'à remarquer que les pôles de notre normalisation sont ceux de la fonction

$$\times_{(\rho,a,b)_x \in Jord(\psi)_{nu,<0}} \Big(L(\tau_{ne}\times St(\rho,a), s'-(b-1)/2-x) L(\tau_{ne}\times St(\rho^*,a), s'-(b-1)/2+x) \Big);$$

ce sont aussi les pôles de la fonction de la normalisation utilisée en [23] I.8 pour cet opérateur et on y a démontré la non nullité. D'où l'assertion cherchée.
On a donc montré que l'image de $N_\psi(s_0,\tau,\pi)$ est l'unique sous-module irréductible de l'induite :

$$\tau^*_{ne} \times_{(\rho,a,b)_x \in Jord(\psi_{nu,<0})} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x \times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x} \times \pi_0. \tag{1}$$

Il faut maintenant montrer l'irréductibilité de π_0. Décrivons d'abord τ_e : on note s_0^+ et s_0^- les demi-entiers consécutifs tels $s_0 \in [s_0^-, s_0^+]$ bien définis si s_0 n'est pas un demi-entier et on pose $s_0^\pm = s_0$ si s_0 est un demi-entier. Par hypothèse, $s_0 \geq 1/2$ et donc $s_0^\pm \geq 1/2$.

Quand on écrit τ_e sous forme d'induite de représentations de Steinberg tordues par un caractère non unitaire, et ce caractère non unitaire est soit $|\,|^{s_0^+}$ soit $|\,|^{s_0^-}$. Ou encore, pour fixer les notations :

$$\tau_e \simeq \times_{(\rho',a',\zeta')\in\mathcal{J}'} St(\rho',a')|\,|^{s_0^{\zeta'}}.$$

Si $s_0 \in 1/2\mathbb{N}$, dans tout ce qui suit s_0^- n'intervient pas. En général on pose pour $\zeta = \pm$, $\mathcal{J}'^{,\zeta} := \{(\rho',a',\zeta') \in \mathcal{J}'; \zeta' = \zeta\}$ et on décompose $\mathcal{J}'^{,\zeta}$ en $\mathcal{J}_{bp}'^{,\zeta} \cup \mathcal{J}_{mp}'^{,\zeta}$ où l'indice bp indique regroupe les triplets (ρ',a',ζ) tel que la représentation de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ associée au triplet $(\rho',a',2s_0^\zeta+1)$ est de bonne parité . D'où une décomposition en induites :

$$\tau|\,|^{s_0} \simeq \tau_{bp}^+|\,|^{s_0^+} \times \tau_{bp}^-|\,|^{s_0^-} \times \tau_{mp}^+|\,|^{s_0^+} \times \tau_{mp}^-|\,|^{s_0^-}.$$

Pour $\zeta = \pm$ et $\zeta' = \pm$, les exposants intervenant dans le support cuspidal de $\tau_{bp}^\zeta|\,|^{\pm s_0^\zeta}$ et de $\tau_{mp}^{\zeta'}|\,|^{\pm s_0^{\zeta'}}$ n'ont pas les même propriété d'intégralité : avec l'indice bp le support cuspidal est de la forme $\rho'|\,|^x$ avec ρ' necessairement autodual et x est soit demi-entier non entier, soit entier, cela dépend de ρ' et avec l'indice mp une de ces conditions est nécessairement opposée. Cela donne toutes les irréductibilités possible entre induite

$$\tau_{bp}^\zeta|\,|^{\pm s_0^\zeta} \times \tau_{mp}|\,|^{s_0^{\zeta'}}, \quad \tau_{bp}^\zeta|\,|^{\pm s_0^\zeta} \times \tau_{mp}^*|\,|^{-s_0^{\zeta'}}.$$

Au passage, on remarque que τ_{bp}^ζ est nécessairement autoduale. On considère l'opérateur d'entrelacement

$$\tau_{bp}^+|\,|^{s^+} \times \tau_{bp}^-|\,|^{s^-}\pi_{bp} \to \tau_{bp}^-|\,|^{-s^-} \times \tau_{bp}^+|\,|^{-s^+} \times \pi_{bp},$$

normalisé par le produit des fonctions $r(s^\zeta,\tau_{bp}^\zeta,\psi)$. Calculé en $s^\zeta = s_0^\zeta$, il est holomorphe (cf. 5.2). On note $\pi_{0,bp}$ son image en $s^\zeta = s_0^\zeta$ et on admet momentanément que cette image est nulle ou irréductible et on conclut la preuve de la proposition. On vérifie que π_0 est l'image de l'opérateur d'entrelacement standard

$$\tau_{mp}^+|\,|^{s^+} \times \tau_{mp}^-|\,|^{s^-} \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{0,bp} \to \tau_{mp}^{*-}|\,|^{-s^-} \times \tau_{mp}^{*+}|\,|^{-s^+} \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{0,bp},$$

normalisé par le produit des fonctions $r(s^\zeta,\tau_{mp}^\zeta,\psi)$, pour $\zeta = \pm$ et calculé en $s^\zeta = s_0^\zeta$. Le cas de mauvaise parité est analogue au cas non entier (on utilise la remarque 2 de 5.1 pour avoir cette similitude) : l'induite de gauche à un unique quotient irréductible qui est aussi l'unique sous-module irréductible de l'induite de droite et cette représentation irréductible intervient avec multiplicité exactement 1 dans les induites écrites. L'opérateur d'entrelacement a donc son image nulle ou coïncidant avec cette sous-représentation. On caractérise encore cette sous-représentation irréductible comme le sous-module de Langlands de l'induite

$$\tau_{mp}^*|\,|^{-s_0} \times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp})} J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b) \times J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b') \times \pi_{0,bp}. \tag{2}$$

Il faut donc démontrer que l'opérateur d'entrelacement est d'image non nulle. On remarque que les fonctions $r(s^\zeta,\tau_{mp}^\zeta,\psi_{bp})$ n'ont ni zéro ni pôles. Comme $\psi_{mp} = \psi_{1/2,mp}^+ \oplus \psi_{1/2,mp}$, le facteur de normalisation est encore le produit de facteurs de normalisation à la Langlands Shahidi pour les opérateurs d'entrelacement, dans les GL convenables :

$$\tau_{mp}^\zeta|\,|^{s^\zeta} \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \to \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \tau_{mp}^\zeta|\,|^{s^\zeta} \tag{3}$$

$$\pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \tau_{mp}^{*\zeta}|\,|^{-s^\zeta} \to \tau_{mp}^{*\zeta}|\,|^{-s^\zeta} \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}). \tag{4}$$

L'opérateur d'entrelacement cherchée est donc le produit de (3), avec l'entrelacement

$$\tau_{mp}^{\zeta}| |^{s^{\zeta}} \times \pi_{0,bp} \rightarrow \tau_{mp}^{*\zeta}| |^{-s^{\zeta}} \times \pi_{0,bp}$$

qui est l'opérateur d'entrelacement standard et l'opérateur d'entrelacement (4). Tous ces opérateurs d'entrelacement n'annulent pas le sous-quotient de Langlands. On a donc montré que π_0 est le sous-module de Langlands de (2).

La nullité ou l'irréductibilité de $\pi_{0,bp}$ est une généralisation de 4.2(ii) mais il faut reprendre la démonstration ; remarquons que dans les cas qui nous intéressent vraiment s'_0 est un demi-entier et $s_0^+ = s_0^-$ avec les notations ci-dessus. Pour simplifier on suppose donc que s'_0 est un demi-entier que l'on note s_0 pour être compatible aux notations déjà utilisées.
La démonstration de 4.2 est basée sur des diagrammes commutatifs, où on peut tranquillement remplacer $St(\rho, a_0)| |^{s_0}$ par $\tau_{bp}| |^{s_0}$, et des propriétés d'holomorphie et de module de Jacquet où on ne peut pas remplacer $St(\rho, a_0)| |^{s_0}$ car on a l'hypothèse $A \geq A_0$ (avec les notations de loc.cite) alors qu'ici A_0 n'est pas uniquement défini. On fait une récurrence sur le nombre de représentations distincts intervenant dans $\mathcal{J}_{bp}$; on initialise, trivialement, la récurrence avec le cas où $\mathcal{J}_{bp}$ est vide. On fixe ρ, a_0 tel que $\tau_{bp} \simeq St(\rho, a_0) \times \cdots \times St(\rho, a_0) \times \tau'$, où les $\cdots$ cachent des copies de $St(\rho, a_0)$ et où τ' est une induite de représentations de Steinberg de la forme $St(\rho'', a'')$ où pour touts les a'' intervenant $a'' < a_0$. Ainsi pour un tel a'', on a certainement $(a''-1)/2+s_0 < (a_0-1)/2+s_0$. On montre que l'on peut reprendre la démonstration de 4.2. On montre d'abord que l'induite

$$St(\rho, a_0)| |^{-s_0} \times \cdots \times St(\rho, a_0)| |^{-s_0} \times N_\psi(s_0, \tau', \pi_{bp})(\tau'| |^{s_0} \times \pi_{bp})$$

a un unique sous-module irréductible à condition que pour tout $(\rho, a, b) \in Jord(\psi_{bp})$ l'inégalité $(a+b)/2-1 \geq (a_0-1)/2+s_0$ force $|a-b|/2 >> 0$ et ce sous-module irréductible intervient, alors, avec multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible. C'est un calcul de module de Jacquet : d'abord on a la propriété de nullité suivante :
pour tout $x \in [(a_0-1)/2-s_0, -(a_0-1)/2-s_0]$, $Jac_{x,\cdots,-(a_0-1)/2-s_0} N_\psi(s_0, \tau', \pi_{bp})(\tau'| |^{s_0} \times \pi_{bp}) = 0$. La représentation $\rho| |^{\pm(a_0-1)/2+s_0)}$ n'est pas dans le support cuspidal de $\tau'| |^{s_0}$ par l'hypothèse faite ci-dessus $a'' < a_0$. Ainsi la non nullité du module de ce module de Jacquet force l'existence de $x' \in [x, -(a_0-1)/2-s_0]$ tel que $Jac_{x',\cdots,-(a_0-1)/2-s_0}\pi_{bp} \neq 0$; mais cela est exclu par l'hypothèse faite sur $Jord(\psi_{bp})$ et 8.1.
Ainsi la représentation

$$\left(St(\rho, a_0)| |^{-s_0} \times \cdots \times St(\rho, a_0)| |^{-s_0}\right) \otimes \left(N_\psi(s_0, \tau', \pi_{bp})(\tau'| |^{s_0} \times \pi_{bp})\right)$$

intervient avec multiplicité 1 dans le module de Jacquet de l'induite considéré. Or cette représentation est irréductible par l'hypothèse de récurrence d'où notre assertion par réciprocité de Frobenius et exactitude du foncteur de Jacquet. On conclut à l'irréductibilité de l'image de tout morphisme non nul de

$$St(\rho, a_0)| |^{s_0} \times \cdots \times St(\rho, a_0)| |^{s_0} \times N_\psi(s_0, \tau', \pi_{bp})(\tau'| |^{s_0} \times \pi_{bp})$$

dans l'induite écrite. On a donc le résultat dans ce cas. Il faut maintenant enlever l'hypothèse faite.
On peut donc reprendre la méthode de descente de 4.2 qui fait passer, avec les notations de loc.cite de $\pi_>$ à π ; ici on fait $\pi_{bp,>}$ à π_{bp} en fixant $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi_{bp})$ mais on peut maintenant supposer que $A \geq (a_0-1)/2+s_0$. Donc on a aussi $A \geq (a'-1)/2+s_0$ pour tout $(\rho, a') \in \mathcal{J}_{bp}$. La preuve de loc.cite s'étend alors pour donner l'assertion.

5.3.2 Description précise de l'image dans certains cas

On garde les notations précédentes, ψ, τ et π dans le paquet associé à ψ. On note ψ_τ la représentation de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ qui correspond à τ par la paramétrisation de Langlands ; c'est une représentation à valeurs dans un groupe $GL(d_\tau,\mathbb{C})$ pour d_τ convenable. On fixe encore un réel, s_0, qui ici est un demi-entier donc de la forme $(b_0-1)/2$ avec $b_0 \geq 2$.
On suppose que ψ_τ tensorisé par la représentation de dimension b_0 de $SL(2,\mathbb{C})$, ce qui donne donc une représentation de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$, est autoduale et à valeurs dans un groupe de même type que le groupe dual de G (c'est-à-dire est de bonne parité) et on suppose aussi que

$b_0 = 2$ ou $b_0 > 2$ et ψ contient la sous-représentation $\psi_\tau \otimes sp_{b_0-2}$ de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ où sp_{b_0-2} est la représentation de $SL(2,\mathbb{C})$ de dimension b_0-2.

Remarquons que ces hypothèses entraînent que τ est autoduale. On note ψ^+ le morphisme qui s'obtient en ajoutant à ψ la représentation $\psi_\tau \otimes sp_2$ si $b_0 = 2$ et si $b_0 > 2$, en remplaçant $\psi_\tau \otimes sp_{b_0-2}$ par $\psi_\tau \otimes sp_{b_0}$. Le morphisme ψ^+ est de même nature que le morphisme ψ.
On note encore ψ_{bp} la somme des sous-représentations irréductibles de ψ ayant bonne parité et ψ^+_{bp} est défini de façon analogue. Le passage de ψ_{bp} à ψ^+_{bp} se décrit ainsi : on note $\psi_{\tau,bp}$ la somme des sous-représentations irréductible de ψ_τ telles que tensorisées avec la représentation de dimension b_0 de $SL(2,\mathbb{C})$ elles sont de bonne parité en tant que représentation de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$. On passe de ψ_{bp} à ψ^+_{bp} en enlevant à ψ_{bp} la représentation $\psi_{\tau,bp} \otimes sp_{b_0-2}$ (quand $b_0 > 2$) et en lui ajoutant $\psi_{\tau,bp} \otimes sp_{b_0}$. Si $\psi_{\tau,bp}$ est irréductible c'est le processus étudié en 4.2 ; dans ce cas pour toute représentation π_{bp} dans le paquet associé à ψ_{bp}, on a défini une représentation π^+_{bp}. Dans le cas général, on a une succession de situation élémentaire étudiée en loc. cite ; on définit successivement le passage de π_{bp} à π^+_{bp} ; a priori cela dépend du choix de l'ordre dans lequel on fait ces passages mais comme on va caractériser π^+_{bp} intrinsèquement, cela prouvera l'indépendance des choix. On pourrait donner les paramètres $\underline{t}^+, \underline{\eta}^+$ comme on l'a fait en loc. cite mais il y a une difficulté dans le cas où $\psi_{\tau,bp}$ a de la multiplicité et on ne le fait pas ici.
On a donc défini le passage $\pi_{bp} \mapsto \pi^+_{bp}$ du paquet de représentations associé à ψ_{bp} dans le paquet de représentations associé à π^+_{bp}. Cela définit une application $\pi \in \Pi(\psi) \mapsto \pi^+ \in \Pi(\psi^+)$ avec les notations de 5.1 :

$$\pi \simeq \pi^{GL}(\psi_{nu,<0}) \times \pi^{GL}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi_{bp} \mapsto \pi^{GL}(\psi^+_{\nu,<0}) \times \pi^{GL}(\psi^+_{1/2,mp}) \times \pi^+_{bp}.$$

Dans les notations ci-dessus, il n'est pas nécessaire que $\psi^+_{1/2,mp}$ soit lié à $\psi_{1/2,mp}$ puisque les induites ne dépendent pas du découpage de ψ^+_{mp} et de ψ_{mp}.

Théorème *Pour toute représentation (non nulle) π dans le paquet associé à ψ, l'image de l'opérateur d'entrelacement normalisé $N_\psi(s,\tau,\pi)$ en $s = (b_0-1)/2$ est exactement π^+ ; c'est-à-dire est nul si $\pi^+ = 0$ et est irréductible isomorphe à π^+ sinon.*

La démonstration de 5.3.1 et en particulier (1) et (2) de cette référence, va permettre de ramener le théorème au cas où $\psi = \psi_{bp}$. Montrons déjà cela. On admet ici que le $\pi_{0,bp}$ de cette preuve est π^+_{bp} et on montre le théorème. Puisqu'ici on suppose dès le départ que l'on calcule l'image en un point demi-entier, il est plus simple de décrire τ_{ne} de loc.cite. On note τ_{nu} les représentations de Steinberg tordu par un caractère de la forme $| |^x$ avec $x \in]-1/2, 1/2[$, $x \neq 0$ tel que τ soit l'induite de τ_{nu} avec une induite de représentation de Steinberg. On décompose encore cette induite avec des notations que l'on espère claires :

$$\tau \simeq \tau_{nu} \times \tau_{mp} \times \tau_{bp}.$$

On rappelle pour éviter les confusions que la définition de bonne parité tient compte de b_0 (de sa parité) et ne dépend pas uniquement de τ. Le τ_{ne} de loc.cite est ici $\tau_{nu}|\,|^{(b_0-1)/2}$ et τ_{mp} est le même.
Avec les références que l'on vient de donner, on a montré que l'image cherchée est l'unique sous-module irréductible de l'induite (les notations sont celles de loc. cite)

$$\tau_{nu}|\,|^{-(b_0-1)/2}\times \tag{1}$$

$$\times_{(\rho,a,b)_x\in Jord(\psi_{nu,<0})}\Big(J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)|\,|^x\times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)|\,|^{-x}\Big)$$

$$\times\tau_{mp}|\,|^{-(b_0-1)/2}\times \tag{2}$$

$$\times_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi_{1/2,mp})}\Big(J(St(\rho,a),-(b-1)/2,-\delta_b)\times J(St(\rho^*,a),-(b-1)/2,-\delta'_b)\Big)$$

$$\times\pi_{bp}^+.$$

On récrit τ_{nu} comme induite de représentation de Steinberg tordu par des caractères non unitaires en utilisant l'autodualité sous la forme

$$\tau_{nu}\simeq\times_{(\rho',a')_{z'}\in Jord(\psi_{\tau,nu,<0})}\Big(St(\rho',a')|\,|^{z'}\times St({\rho'}^*,a')|\,|^{-z'}\Big).$$

Si $b_0=2$, on a donc $\delta_{b_0}=\delta'_{b_0}=1/2$ et avec des notations un peu compliquée (mais générales) $\tau_{nu}|\,|^{-(b_0-1)/2}\simeq$

$$\times_{(\rho',a')_{z'}\in Jord(\psi_{\tau,nu,<0})}J(St(\rho',a'),-(b_0-1)/2,-\delta_{b_0})\times J(St(\rho',a'),-(b_0-1)/2,-\delta'_{b_0}). \tag{3}$$

Si $b_0>2$ par hypothèse pour tout $(\rho',a')_{z'}\in Jord(\psi_{\tau,nu,<0})$ il existe $(\rho',a',b_0-2)_{z'}\in Jord(\psi_{nu,<0})$ (avec la même multiplicité). On peut donc remplacer la ligne (1) ci-dessus induite avec la ligne suivante par le sous-module irréductible où on remplace, pour chaque $(\rho',a')_{z'}\in Jord(\psi_{\tau,nu,<0})$

$$St(\rho',a')|\,|^{-(b_0-1)/2+z'}\times St({\rho'}^*,a')|\,|^{-(b_0-1)/2-z'}\times$$

$$J(St(\rho',a'),-(b_0-3)/2,-\delta_{b_0})|\,|^{z'}\times J(St({\rho'}^*,a'),-(b_0-3)/2,-\delta'_{b_0})|\,|^{-z'}$$

par son sous-module irréductible (c'est le sous-module de Langlands de la situation)

$$J(St(\rho',a'),-(b_0-1)/2,-\delta_{b_0})|\,|^{z'}\times J(St({\rho'}^*,a'),-(b_0-1)/2,-\delta'_{b_0})|\,|^{-z'} \tag{4}$$

On fait la même opération avec τ_{mp} mais on commence par faire un choix de décomposition $\tau_{mp}\simeq\tau_{1/2,mp}\times\tau^*_{1/2,mp}$. Pour simplifier la démonstration, on fait ce choix de telle sorte que, si $b_0>2$, pour tout $(\rho',a')\in Jord(\psi_{\tau,1/2,mp})$ (avec des notations évidentes), $(\rho',a',b_0-2)\in Jord(\psi_{1/2,mp})$ avec une multiplicité supérieure ou égale à celle de $(\rho',a')\in Jord(\psi_{\tau,1/2,mp})$. Ensuite on conclut comme ci-dessus que soit $b_0=2$ et que l'on écrit $\tau_{mp}|\,|^{-(b_0-1)/2}$ de façon analogue à (3) sans les torsions non unitaires soit $b_0>2$ et on peut remplacer l'induite de la ligne (2) ci-dessus avec la ligne qui la suit par l'analogue de (4) sans les torsions non unitaires.
Le théorème résulte alors de la proposition de 5.1 et de la remarque 2 de loc.cite. Il nous reste donc à traiter le cas où $\psi=\psi_{bp}$ qui va être une conséquence simple de 4.2 et des vertus des normalisations. Ici écrivons $\tau_{bp}\times_{j\in[1,v]}St(\rho_j,a_j)$. On considère l'opérateur d'entrelacement

$$\times_{j\in[1,v]}St(\rho_j,a_j)|\,|^{s_0}\times\pi_{bp}\rightarrow\times_{j\in[v,1]}St(\rho_j,a_j)|\,|^{-s_0}\times\pi_{bp}.$$

On fait dépendre cet opérateur de nombres complexes s'_j pour $j \in [1,v]$ voisins de 0 et que l'on évaluera en 0 :

$$\times_{j\in[1,v]} St(\rho_j,a_j)|\,|^{s'_j+(b_0-1)/2} \times \pi_{bp} \to \times_{j\in[v,1]} St(\rho_j,a_j)|\,|^{-s'_j-(b_0-1)/2} \times \pi_{bp}. \qquad (1)$$

En 4.2, on a étudié successivement les opérateurs (la différence entre (1) et (2) et le changement de $[v,1]$ en $[1,v]$ dans le membre de droite) :

$$\times_{j\in[1,v]} St(\rho_j,a_j)|\,|^{s'_j+(b_0-1)/2} \times \pi_{bp} \to \times_{j\in[1,v]} St(\rho_j,a_j)|\,|^{-s'_j-(b_0-1)/2} \times \pi_{bp} \qquad (2)$$

avec une normalisation différente : en effet à chaque étape ψ_{bp} est modifié on remplace progressivement (ρ_j,a_j,b_0-2) par (ρ_j,a_j,b_0) ; pour tout $\ell \in [1,v]$, on note $\psi_{bp}^{+\ell}$ le morphisme où on a effectué ce changement pour tout $j \in]\ell,v]$, donc $\psi_{bp}^{+v} := \psi_{bp}$. On a donc normalisé par $\times_{\ell\in[1,v]} r(\psi_{bp}^{+\ell}, St(\rho_\ell,a_\ell), s'_\ell+(b_0-1)/2)$. Ainsi la contribution de (ρ,a_j,b_0-2) à $r(\psi_{bp}, St(\rho,a_\ell), s'_\ell+(b_0-1)/2)$ qui était

$$\frac{L(St(\rho,a_\ell)\times St(\rho,a_j), s'_\ell+(b_0-1)/2-(b_0-3)/2)}{L(St(\rho,a_\ell)\times St(\rho,a_j), s'_\ell+(b_0-1)/2+(b_0-1)/2)} =$$

$$\frac{L(St(\rho,a_\ell)\times St(\rho,a_j), s'_\ell+1)}{L(St(\rho,a_\ell)\times St(\rho,a_j), s'_\ell+b_0-1)}$$

devient $L(St(\rho,a_\ell)\times St(\rho,a_j), s'_\ell)/L(St(\rho,a_\ell)\times St(\rho,a_j), s'_\ell+b_0-1)$. Aux dénominateurs près qui n'introduisent ni zéro ni pôle on passe donc de $r(\psi_{bp}, St(\rho,a_\ell), s'_j+(b_0-1)/2)$ à $r(\psi_{bp}^{+\ell}, St(\rho_\ell,a_\ell), s'_\ell+(b_0-1)/2)$ en multipliant par

$$\times_{j\in]\ell,v]} L(St(\rho_\ell,a_\ell)\times St(\rho_j,a_j), s'_\ell)/L(St(\rho_\ell,a_\ell)\times St(\rho_j,a_j), s'_\ell+1).$$

Ceci est exactement la normalisation de Langlands Shahidi qui permet de passer du deuxième membre de (1) à celui de (2) par des opérateurs d'entrelacement holomorphes bijectifs ([23]I.9). Ainsi l'image de l'opérateur (1) et exactement l'image de l'opérateur (2). En particulier, elle est nulle ou irréductible et se calcule par les formules explicites de 4.2.

6 Places archimédiennes, les représentations ayant de la cohomologie

Dans ce paragraphe on suppose que le corps de base est archimédien et on va même se limiter au cas où F, le corps de base est réel. Et on ne considère que des représentations ayant de la cohomologie et qui sont composantes locales de formes automorphes de carré intégrable donc le π de tout ce travail est cohomologique, pour un bon système de coefficients et est unitaire. Quand on considérera des induites, on se place en des points où le caractère infinitésimal est entier régulier ; c'est surtout régulier qui nous importe. Ces restrictions sont évidemment gênantes ; elles sont dûes au fait que l'on ne connaît pas les paquets d'Arthur en général dans le cas archimédien et aussi au fait que les opérateurs d'entrelacement sont plus difficile à étudier aux places archimédiennes car il y a plus de réductibilité qu'aux places p-adiques.

6.1 Les opérateurs d'entrelacement standards

Précisément, on fixe une représentation irréductible unitaire π ayant de la cohomologie pour un bon système de coefficients et une induite de séries discrètes, τ, de $GL(n,F)$; c'est-à-dire que τ est une représentation tempérée. On considère l'opérateur d'entrelacement standard

$$M(s,\tau,\pi) : \tau|\,|^s \times \pi \to \tau^*|\,|^{-s} \times \pi.$$

Proposition *On fixe s_0 un réel strictement positif tel que le caractère infinitésimal de l'induite $\delta|\,|^{s_0}\times\pi$ soit régulier. Alors $M(s,\tau,\pi)$ est holomorphe en $s=s_0$. La représentation induite $\tau|\,|^{s_0}\times\pi$ a un unique quotient irréductible et l'image de $M(s_0,\tau,\pi)$ est irréductible isomorphe à ce quotient irréductible.*

C'est évidemment l'hypothèse de régularité du caractère infinitésimal couplé au fait que grâce à [27] on connaît les paramètres de Langlands de π qui rend tout très simple. Cette proposition est démontrée à l'issue des sous-sections suivantes.

6.1.1 Caractère infinitésimal

On écrit d'abord le caractère infinitésimal d'une représentation ayant de la cohomologie ; cela est fait pour les groupes unitaires et des groupes orthogonaux en [3]. On reprend à peu près le même point de vue. Ici on voit vraiment les représentations dans des paquets, ceux d'Adams-Johnsons, dont il n'est pas prouvé que ce sont les paquets d'Arthur, sauf dans le cas des groupes unitaires ([1] et [13]) ; ces paquets sont paramétrés par des morphismes ψ de $W_F\times SL(2,\mathbb{C})$ dans le L-groupe de G ; ici on considère bien tout le L-groupe et pas seulement sa composante algébrique. On peut encore décomposer ces morphismes en morphismes élémentaires, un morphisme élémentaire paramétrant un couple formé d'une série discrète, δ, d'un groupe $GL(m,\mathbb{R})$ et une représentation irréductible de dimension finie de $SL(2,\mathbb{C})$ paramétré par sa dimension b ; ici nécessairement $m=1$ ou 2. De plus, on sait que $\delta^*\simeq\delta$ et il y a une condition de parité sur b qui dépend de δ. Si $m=1$ δ est l'un des 2 caractérès quadratiques de $\mathbb{R}$; le caractère infinitésimal du caratère de $GL(b,\mathbb{R})$ induit par δ est évidemment déterminé par la collection d'entiers : $((b-1)/2,\cdots,-(b-1)/2)$; c'est-à-dire le segment $[(b-1)/2,-(b-1)/2]$. Si $m=2$, δ est une série discrète unitaire de $GL(2,\mathbb{C})$ et on note a_δ l'entier tel que le caractère infinitésimal de δ soit $(a_\delta-1)/2,-(a_\delta-1)/2$. Le caractère infinitésimal de la représentation $Speh(\delta,b)$ de $GL(2b,\mathbb{R})$ est alors la collection de demi-entiers, formée de l'union de 2 segments, le segment $[(b-1)/2,-(b-1)/2]$ translaté par $(a_\delta-1)/2$ et le même segment translaté par $-(a_\delta-1)/2$, c'est-à-dire :

$$\{(a_\delta-1)/2+[(b-1)/2,-(b-1)/2]\}\cup\{-(a_\delta-1)/2+[(b-1)/2,-(b-1)/2]\}.$$

On revient à ψ qui est la somme de ces morphismes élémentaires et la représentation de $\pi^{GL}(\psi)$ du GL convenable associé à ψ est l'induite des représentations $Speh(\delta,b)$ comme précédemment ; son caractère infinitésimal est l'union des segments que l'on vient de décrire. On transfère de façon complètement évidente ce caractère du centre de l'algèbre enveloppante du GL en un caractère du centre de l'algèbre enveloppante de G et toute représentation dans le paquet associé par [1] à ψ a ce caractère infinitésimal. La régularité du caractère infinitésimal assure que ces segments ne se coupent pas. En particulier pour au plus un couple intervenant dans ψ, δ est un caractère.

6.1.2 Présentation du quotient de Langlands

On exploite la régularité du caractère infinitésimal sous la forme du lemme suivant : pour tout (δ,b) intervenant dans ψ, on suppose donné $\ell_{\delta,b}\in[0,b]$ un entier de même parité que b. On note ici, pour $d_1\geq d_2$, $Speh(\delta,d_1,d_2)$ le quotient de Langlands de l'induite $\delta|\,|^{d_1},\cdots\delta|\,|^{d_2}$ pour le GL convenable. On suppose aussi que π_0 est une série discrète d'un groupe de même type que G de rang plus petit et que l'induite :

$$\pi':=\times_{(\delta,b)}Speh(\delta,(b-1)/2,(\ell_{\delta,b}+1)/2)\times\pi_0$$

a le caractère infinitésimal associé à ψ tel que décrit précédemment et que le caractère infinitésimal de l'induite $\tau| \,|^{s_0} \times \pi'$ est régulier.

Lemme *La représentation π' et l'induite $\tau| \,|^{s_0} \times \pi'$ ont toutes deux un unique quotient irréductible et c'est le sous-quotient de Langlands de ces représentations.*

Pour préciser, la notion de sous-quotient de Langlands, disons qu'en remplaçant les représentations irréductibles $Speh(\delta,(b-1)/2,(\ell_b+1)/2)$ par une induite de série discrète tordu et en réordonnant pour être dans la chambre de Weyl positive, on obtient une représentation telle que $\tau| \,|^{s_0} \times \pi'$ en soit un quotient.
Soient $(\delta,b),(\delta',b')$ intervenant dans ψ et soit $d<b$ (resp. $d'<b'$) un entier de même parité que b (resp. b'). Supposons d'abord que δ' soit un caractère. Alors δ n'en est pas un et on a sûrement

$$(a_\delta-1)/2-(b-1)/2>(b'-1)/2; \quad -(b'-1)/2>-(a_\delta-1)/2+(b-1)/2.$$

Pour tout $d_1 \leq d_2 \in [0,b]$ et $d'_1<d'_2 \in [0,b']$, on a l'irréductibilité de $\tilde{\tau}:=Speh(\delta,(d_1-1)/2,(d'_1-1)/2) \times Speh(\delta',(d'_1-1)/2,(d'_2-1)/2)$ d'après [23] I.9. Supposons maintenant que ni δ ni δ' ne sont des caractères. Par symétrie on suppose que $(a_\delta-1)/2+(b-1)/2>(a_{\delta'}-1)/2+(b'-1)/2$, d'où aussi $-(a_\delta-1)/2-(b-1)/2<-(a_{\delta'}-1)/2-(b'-1)/2$. On a alors par régularité :

$$(a_\delta-1)/2-(b-1)/2>(a_{\delta'}-1)/2+(b'-1)/2;-(a_{\delta'}-1)/2-(b'-1)/2>-(a_\delta-1)/2+(b'-1)/2.$$

Et on peut encore appliquer [23] I.9 pour avoir l'irréductibilité de l'analogue de $\tilde{\tau}$.
On considère τ et s_0 comme dans l'énoncé mais on suppose que τ est une série discrète ou un caractère quadratique et on note a_τ le paramètre de τ. Supposons que τ soit une série discrète et non un caractère ; on reprend les notations δ,b,d_1,d_2 déjà introduites et on suppose aussi que δ est une série discrète. Ici, on a soit l'irréductibilité de $\tau| \,|^{s_0} \times Speh(\delta,(d_1-1)/2,(d_2-1)/2)$ parce que soit $a_\tau+b+2s_0+1$ n'est pas un entier ou parcequ'il n'a pas la bonne parité et sinon on regarde la place des éléments du couple

$$(a_\tau-1)/2+s_0,-(a_\tau-1)/2+s_0 \tag{1}$$

par rapport au 2 segments :

$$(a_\delta-1)/2+[(b-1)/2,-(b-1)/2];-(a_\delta-1)/2+[(b-1)/2,-(b-1)/2]. \tag{2}$$

Une position n'est pas possible : $(a_\tau-1)/2+s_0<(a_\delta-1)/2-(b-1)/2$ et $-(a_\tau-1)/2+s_0<-(a_\delta-1)/2-(b-1)/2$ car en ajoutant les 2 inégalités, on aurait $2s_0<b-1$ et $2s_0 \leq 0$, car s_0 est maintenant un demi-entier, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $s_0>0$. Il reste 2 possibilités : soit les 2 segments de (2) sont à l'intérieur du segment $[(a_\tau-1)/2+s_0,-(a_\tau-1)/2+s_0]$ ou à l'inverse le segment $[(a_\tau-1)/2+s_0,-(a_\tau-1)/2+s_0]$ est à l'intérieur du segment $[(a_\delta-1)/2-(b-1)/2,-(a_\delta-1)/2+(b-1)/2]$ soit

$$(a_\tau-1)/2+s_0>(a_\delta-1)/2+(b-1)/2;-(a_\tau-1)/2+s_0>-(a_\delta-1)/2+(b-1)/2.$$

Dans cette dernière éventualité, en ajoutant les inégalités, on trouve $2s_0>(b-1)$ ou encore $s_0>(b-1)/2$. Dans le premier cas les induites $\tau| \,|^{s_0} \times Speh(\delta,d_1,d_2)$ sont irréductibles d'après [23] I.9 et dans le 2e cas ces induites sont avec des exposants dans la chambre de Weyl strictement positive. On peut donc mettre $\tau| \,|^{s_0}$ a la bonne place, ce qui veut dire : que $\tau| \,|^{s_0} \times \pi'$ est un quotient de l'induite

$$\times_{(\delta,b);(\ell_{\delta,b}+1)/2>s_0} Speh(\delta,(b-1)/2,(\ell_{\delta,b}+1)/2)$$

$$\times_{(\delta,b);(\ell_\delta+1)/2\leq s_0} Speh(\delta,(b-1)/2,\tilde{s}_0)\times\tau|\;|^{s_0}\times_{(\delta,b);(\ell_\delta+1)/2\leq s_0} Speh(\delta,\tilde{s}_0-1,\ell_{\delta,b})\times$$
$$\times_{(\delta,b);(b-1)/2\leq s_0} Speh(\sigma,(b-1)/2,(\ell_{\delta,b}+1)/2)\times\pi_0,$$

où $\tilde{s}_0$ dépend de (δ,b) et est le plus petit demi-entier supérieur strictement à s_0 et tel que $2\tilde{s}_0\equiv b[2]$.
Si τ n'est pas une série discrète mais une représentation tempérée plus générale, on procède de la même façon pour déplacer les constituants de τ écrite comme induite. Cela permet de conclure puisque l'on s'est essentiellement mis dans la fermeture de chambre de Weil positive et la méthode décrite permet de se mettre exactement dans la fermeture de la chambre de Weyl positive. Par régularité du caractère infinitésimal, on a l'unicité du quotient de Langlands dans cette situation. Cela termine la preuve du lemme.

6.1.3 Paramètres de Langlands des représentations cohomologiques d'après [27]

On reprend toutes les notations et les hypothèses de 6.1.2. En particulier la représentation τ est une induite de série discrète avec un caractère infinitésimal entier régulier.

Remarque 1. *Les représentations ayant de la cohomologie dans le paquet associé à ψ sont toutes des quotients de Langlands des représentations π' décrites en 6.1.2 quand la famille des $\ell_{\delta,b}$ et π_0 varient.*

L'énoncé ne dit pas que tous les choix sont possibles car il me semble qu'il y a un rapport entre π_0 et les $(\delta,b,\ell_{\delta,b})$ plus fort que celui mis sur le caractère infinitésimal.
C'est une conséquence de [27] 6.16 avec comme difficulté que cette référence ne s'applique qu'aux groupes connexes ; dans le cas des groupes orthogonaux, il faut utiliser la description en termes d'induites cohomologies de [1] 2.2 et le calcul des paramètres de Langlands de telles induites donné en [26] 6.6.15.

Remarque 2. *On suppose qu'il existe une représentation tempérée τ' d'un GL convenable et un demi-entier s' et une représentation irréductible π^- d'un groupe de même type que G tel que π soit un quotient de $\tau|\;|^{s'}\times\pi^-$. Alors π^- a de la cohomologie.*

On compare la paramétrisation de Langlands de π^- avec celle de π et cela montre que nécessairement, il existe un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $Jord(\psi)$ tel que pour tout $(\delta,b)\in\mathcal{E}$ on ait $(b-1)/2=s'$, $\tau\simeq_{(\delta,b)\in\mathcal{E}}\delta$ et avec nos notations $\ell_{\delta,b}<b$. Cela donne aussi que π^- est le quotient de Langlands de l'analogue de π' en remplaçant (δ,b) par $(\delta,b-2)$ dans $Jord(\psi)$ sans changer $\ell_{\delta,b}$. En utilisant [1] paragraphe 3, on voit que π^- est dans un des paquets d'Adams-Johnson et a donc de la cohomologie.

Remarque 3. *On pourrait très certainement aussi décrire les couples τ,s_0 tel que le quotient de Langlands de 6.1.2 ait de la cohomologie et la réponse est sans doute que l'analogue de ψ^+ existe.*

Pour pouvoir utiliser une telle remarque, il faudrait supposer que les paquets d'Adams-Johnson sont ceux d'Arthur donc mieux vaut mettre directement l'hypothèse d'existence de cohomologie les rares fois où cela est nécessaire.

6.1.4 Holomorphie des opérateurs d'entrelacement standard

On considère ici l'opérateur d'entrelacement standard déjà introduit $M(s,\tau,\pi)$ en $s = s_0 > 0$. Avec 6.1.3 on fixe π' tel que π soit le quotient de Langlands de π' et on considère l'opérateur d'entrelacement standard $M(s,\tau,\pi')$. Il suffit de démontrer que $M(s,\tau,\pi')$ est holomorphe en $s = s_0$ pour avoir le même résultat pour $M(s,\tau,\pi)$. On démontre donc que $M(s,\tau,\pi')$ est holomorphe en $s = s_0$ avec les hypothèses de régularité faites sur le caractère infinitésimal de $\tau|\,|^{s_0}\times\pi'$. On décompose $M(s,\tau,\pi')$ en le produit des 3 opérateur d'entrelacement standard, le premier et le dernier étant dans des groupes de type GL et celui du milieu dans un groupe de même type que G :

$$\tau|\,|^s \times_{(\delta,b)} Speh(\delta,(b-1)/2,(\ell_{\delta,b}+1)/2) \to \times_{(\delta,b)} Speh(\delta,(b-1)/2,(\ell_{\delta,b}+1)/2)\times\tau|\,|^s; \quad (1)$$

$$\tau|\,|^s\times\tau' \to \tau^*|\,|^{-s}\times\tau'; \quad (2)$$

$$\times_{(\delta,b)} Speh(\delta,(b-1)/2,(\ell_{\delta,b}+1)/2)\times\tau^*|\,|^{-s} \to \tau^*|\,|^{-s}\times_{(\delta,b)} Speh(\delta,(b-1)/2,(\ell_{\delta,b}+1)/2). \quad (3)$$

L'opérateur d'entrelacement (2) est holomorphe en $s = s_0$ grâce aux travaux d'Harish-Chandra car on suppose $s_0 > 0$; on rappelle que τ' est une série discrète et que τ est tempérée.

On a démontré l'holomorphie des opérateurs (1) et (3) en [23]I.8 mais à condition de les normaliser à la Langlands-Shahidi. Il suffit donc de montre que les facteurs de normalisations n'ont ni zéro ni pôle. Les facteurs de normalisation sont les mêmes pour (1) et (3) (peut-être aux facteurs ϵ près que l'on ne considère par ici) et ont même comportement que

$$\prod_{(\delta,b)} \frac{L(\tau\times\delta, s-(b-1)/2))}{L(\tau\times\delta, s+(\ell_{\delta,b}+1)/2+1))}.$$

Ce qui compte est donc le numérateur ; on écrit explicitement $L(\tau\times\delta, s-(b-1)/2))$ grâce à [25] 1.4 repris en [14] 1.5. Avec la formule de produit, on traite le cas où τ est une série discrète ou un caractère unitaire et on va même supposer que τ et δ sont des séries discrètes (le cas des caractères s'obtient en faisant $a_\tau = 1$ ou $a_\delta = 1$ ci-dessous et en ne gardant qu'un seul des 2 facteurs qui deviennent égaux)

$$L(\tau\times\delta, s-(b-1)/2)) = \Gamma(s-(b-1)/2+|a_\tau-a_\delta|/2)\Gamma(s-(b-1)/2+(a_\tau+a_\delta)/2-1).$$

On ne peut pas avoir $s_0+(a_\tau-1)/2 \leq (b-1)/2-(a_\delta-1)/2$ car par régularité, on aurait aussi $s_0+(a_\tau-1)/2 < -(b-1)/2-(a_\delta-1)/2$ ce qui contredit la positivité de s_0. Ainsi le 2e facteur n'a pas de pôle. Etudions le 1e facteur en supposant d'abord que $a_\tau \geq a_\delta$; dans ce cas, si $s_0+(a_\tau-1)/2 \leq (b-1)/2+(a_\delta-1)/2$ par régularité on a aussi $s_0+(a_\tau-1)/2 \leq -(b-1)/2+(a_\delta-1)/2$ et

$$(a_\tau-1)/2 < s_0+(a_\tau-1)/2 \leq -(b-1)/2+(a_\delta-1)/2 \leq (a_\delta-1)/2$$

d'où $a_\tau < a_\delta$ ce qui est contradictoire. D'où encore l'absence de pôle si $a_\tau \geq a_\delta$. Dans le cas opposé, l'inégalité $s_0-(a_\tau-1)/2 \leq -(a_\delta-1)/2+(b-1)/2$, force, par régularité, l'inégalité $s_0-(a_\tau-1)/2 \leq -(a_\delta-1)/2-(b-1)/2$ et on trouve encore $a_\tau > a_\delta$ ce qui est contradictoire. On a donc démontré l'absence de pôle dans tous les cas. Cela montre l'holomorphie de l'opérateur d'entrelacement standard associé à (1). D'où l'holomorphie cherchée qui termine la preuve.

6.1.5 Conclusion de la preuve

On démontre maintenant la proposition : on a démontré l'unicité du quotient irréductible et son identification au quotient de Langlands en 6.1.2 ; on a démontré l'holomorphie de l'opérateur d'entrelacement standard en 6.1.4. On sait maintenant que l'image de l'opérateur d'entrelacement en $s = s_0$, étant non nulle a pour quotient irréductible le quotient de Langlans. Par la même méthode que celle donnant l'identification du quotient irréductible de $\tau|\,|^{s_0} \times \pi$ avec le quotient de Langlands, on montre que l'induite $\tau^*|\,|^{-s_0}\times\pi$ admet cette représentation irréductible comme unique sous-module irréductible. La multiplicité 1 force alors l'image de l'opérateur d'entrelacement à être réduit à cette représentation. Cela termine la preuve de la proposition.

6.2 Opérateurs d'entrelacement normalisés

Fixons ψ paramétrant un paquet de représentations unitaires ayant de la cohomologie de $G(\mathbb{R})$. On se doute que le paquet de représentations associé par Arthur à ψ est le même que celui de [1], mais ceci n'est pas écrit et on n'en a pas besoin, comme me l'a fait remarquer H. Grobner, la seule chose qui compte pour nous est que le caractère infinitésimal des représentations dans le paquet d'Arthur est le caractère infinitésimal décrit en 6.1.1. Ceci est connu. On fixe π dans le paquet d'Arthur associé à ψ.
Soit τ une représentation tempérée ; on définit $r(s,\tau,\psi)$ comme dans le cas p-adique. Cela permet de poser : $N_\psi(s,\tau,\pi) = r(s,\tau,\psi)^{-1}M(\tau,\pi,s)$.

Proposition *Soit $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$; on suppose que l'induite $\tau|\,|^{s_0} \times \pi$ a un caractère infinitésimal régulier. Alors $N_\psi(s,\tau,\pi)$ est holomorphe en $s = s_0$ et son image est la représentation irréductible isomorphe à l'unique (cf. 6.1) quotient irréductible de l'induite de $\tau|\,|^{s_0} \times \pi$.*

En tenant compte de 6.1, il suffit (il faut d'ailleurs aussi) montrer que $ordre_{s=s_0} r(s,\psi,\tau) = 0$. Par la formule de produit, on se ramène au cas où τ est une série discrète et on décompose ψ comme en 6.1.1. Comme dans le cas p-adique le facteur faisant intervenir r_G ne donne ni zéro ni pôle car il ne dépend que de τ et est calculé en $s_0 > 0$. Les autres termes sont : (les notations sont celles de 6.1.1)

$$\times_{(\rho,b)} L(\tau\times\delta, s-(b-1)/2)/L(\tau\times\delta, s+(b+1)/2).$$

Il faut donc vérifier que $ordre_{s=s_0} L(\tau\times\delta, s-(b-1)/2) = 0$; mais cette démonstration a été faite en 6.1.4. Cela termine la preuve.

7 Applications aux séries d'Eisenstein

Ici on fixe un corps de nombres, k. On fixe aussi une représentation automorphe de carré intégrable π de G. On note π^{GL} la représentation θ-discrète du groupe linéaire convenable associé par Arthur à π ; on écrit $\pi^{GL} \simeq \times_{(\rho',b')\in Jord(\pi^{GL})} Speh(\rho',b')$; ceci définit $Jord(\pi^{GL})$. On note encore r_G la représentation Sym^2 (resp. $\wedge^2$) de tout groupe linéaire si G est un groupe symplectique ou orthogonal pair (resp. un groupe orthogonal impair). Soit ρ une représentation cuspidale unitaire d'un groupe GL. On a l'analogue global de $r(s,\tau,\psi)$, noté $r(s,\rho,\pi^{GL})$ avec :

$$r(s,\rho,\pi^{GL}) := \frac{L(\rho\times\pi^{GL},s)}{L(\rho\times\pi^{GL},s+1)}\frac{L(\rho,r_G,2s)}{L(\rho,r_G,2s+1)}.$$

Comme toutes les fonctions L intervenant sont des fonctions pour des groupes GL, on connaît assez leurs pôles en tout point $s = s_0 \in \mathbb{R}_{\geq 1/2}$. En un tel point, on a $ordre_{s=s_0} r(s, \rho, \pi^{GL}) \geq -1$. Et cet ordre vaut -1 exactement quand s_0 est un demi-entier et les 2 conditions ci-dessous sont satisfaites :
(1) soit $s_0 = 1/2$ et $L(\rho, r_G, s)$ a un pôle en $s = 1$ soit $s_0 \geq 1$ et π^{GL} écrit sous-forme d'induite de représentations de Speh a dans cet induction le facteur $Speh(\rho, 2s_0 - 1)$;
(2) pour tout ρ', b' tel que π^{GL} écrit sous-forme d'induite de représentations de Speh a dans cet induction le facteur $Speh(\rho, b')$, avec $b' = 2s_0$, $L(\rho \times \rho', 1/2) \neq 0$.

Pour $s \in \mathbb{R}$, on considère les séries d'Eisenstein $E(\rho \times \pi, s)$. On fixe aussi $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ et on suppose que le caractère infinitésimal de l'induite $\rho| |^{s_0} \times \pi$ est entier régulier. On a le théorème suivant (essentiellement démontré en [19]) :

Théorème *En $s = s_0$, les séries d'Eisenstein $E(\rho \times \pi, s)$ ne sont pas holomorphes seulement si $ordre_{s=s_0} r(s, \rho, \pi^{GL}) = -1$. De plus si l'une de ces conditions est satisfaite, le pôle en $s = s_0$ est d'ordre au plus 1.*

En effet en [19] 3.6, on a montré que l'holomorphie des opérateurs d'entrelacement locaux, en les places p-adiques, normalisés, noté $N_\psi(s, \cdots)$ en $s = s_0$ entraîne l'holomorphie de tous les opérateurs d'entrelacement normalisés qui calculent les termes constants des séries d'Eisenstein considérées. Grâce à 5.2, on a donc cette propriété d'holomorphie pour tous les opérateurs d'entrelacement à considérer. Pour les places archimédiennes, l'holomorphie est facile car on a montré comment remplacer la représentation $\rho_v \times \pi_v$ par une induite dans la chambre de Weyl positive (6.1.2) ; a priori on n'est que dans la fermeture de la chambre de Weyl positive, et il faut donc normaliser les opérateurs d'entrelacement pour avoir l'holomorphie ; mais la régularité du caractère infinitésimal permet de montrer comme en 6.2 que ces facteurs de normalisations n'ont ni zéro ni pôle.
Les pôles des séries d'Eisenstein ne viennent donc que des facteurs de normalisations de [19] 2.3. On a calculé ces facteurs de normalisations en loc. cite, ce qui est très facile, et avec l'hypothèse de régularité sur le caractère infinitésimal, le pôle est au plus d'ordre 1. De plus si un tel facteur de normalisation a un pôle alors il en est de même de la fonction $r(s, \rho, \pi)$ qui est le facteur de normalisation pour l'entrelacement $\rho| |^s \times \pi \to \rho| |{-s} \times \pi$. D'où le théorème.

Dans tout ce qui suit, on suppose que les hypothèses du théorème sont satisfaites : π a de la cohomologie à l'infini et l'induite $\rho| |^{s_0} \times \pi$ a un caractère infinitésimal entier régulier et on suppose que $ordre_{s=s_0} r(s, \rho, \pi^{GL}) = -1$. On décrit d'abord a priori la représentation qui va déterminer l'existence d'un résidu non nul ; pour le faire on n'a besoin que de la condition (1) ci-dessus, pas la condition (2).
Par définition, la représentation π^+ est l'image de l'opérateur d'entrelacement normalisé par la fonction $r(s, \rho, \tau)$:

$$\rho| |^s \times \pi \to \rho| |{-s} \times \pi$$

calculé en $s = s_0$. Plus précisément :
soit v une place finie, on a défini π_v^+ en partant de π_v en 5.3.2 ; soit v une place archimédienne, on note π_v^+ l'unique quotient irréductible de l'induite $\rho_v| |^{s_0} \times \pi_v$. Et on pose $\pi^+ := \otimes_v \pi_v$; dans certains cas, $\pi^+ = 0$ et si cette représentation n'est pas nulle on ne sait pas que cette représentation est automorphe de carré intégrale ; on montre ici qu'elle est de carré intégrable quand les conditions (1) et (2) du théorème précédent sont satisfaites car se réalisant dans les résidus. La réciproque est certainement aussi vraie mais on renvoie à 7.4 pour expliquer ce qui manque pour la montrer.

Le but de cette section est de montrer que s_0 vérifiant les conditions nécessaires du théorème est un pôle si et seulement si π^+ est non nul ; dans le cas où π est cuspidal c'est exactement cela que l'on démontre et dans le cas général, pour le faire, on ajoute l'hypothèse que, π_v^+ a de la cohomologie si v est une place archimédienne et que les représentations automorphes irréductibles ayant de la cohomologie interviennent avec multiplicité au plus 1 dans le spectre discret des groupes classiques de même type que G. On démontre alors aussi que l'espace des résidus est irréductible quand il n'est pas nul.

7.1 Le cas de rang 1

On suppose ici que π est une représentation cuspidale et ce cas est alors très simple.

Théorème *L'espace des résidus* $\Big((s-s_0)E(\rho\times\pi,s)\Big)_{s=s_0}$ *est non nul exactement quand* π^+ *est non nul et alors la représentation ainsi définie est irréductible isomorphe à* π^+.

On sait que l'espace des résidus $\Big((s-s_0)E(\rho\times\pi,s)\Big)_{s=s_0}$ a une projection nulle sur l'espace des formes automorphes cuspidales ([22] 1.3.4 pour la définition de cette projection). Et toute fonction non nulle dans cet espace de résidu a exactement un terme constant cuspidal non nul, c'est celui qui est relatif au parabolique maximal de Levi, $GL(d_\rho)\times G$. Et ce terme constant appartient à l'image de l'opérateur d'entrelacement $\otimes'_v N_\psi(\rho\times\pi,s_0)$ (c'est un calcul facile fait en [22] II.1.7). On a vu que l'image de cet opérateur est exactement π^+, c'est-à-dire est nul exactement si π^+ est nul et est isomorphe à cette représentation sinon. D'où le théorème.

7.2 Le cas général

On veut le même résultat que dans le cas de rang 1 mais j'ai besoin d'une hypothèse de multiplicité 1. La formule de multiplicité annoncée par Arthur, donne la multiplicité de π^+ en fonction de multiplicité locale ; on sait que ces multiplicités locales sont au plus 1 aux places p-adiques ([17], [18]) et si l'on admet que π_∞^+ a de la cohomologie et que les paquets d'Arthur sont aussi ceux d'Adams-Johnson dans ce cas, il résulte aussi de [1] que la multiplicité locale aux places archimédiennes est au plus 1. Ainsi la formule de multiplicité d'Arthur donne au plus 1. On prend donc ici l'hypothèse raisonable que l'on sait a priori que les représentations automorphes de carré intégrable ayant de la cohomologie à l'infini interviennent avec multiplicité 1 dans le spectre discret.
On introduit les notations suivantes : soit π' une représentation automorphe de carré intégrable d'un groupe classique explicitement réalisée. Soit ρ' une représentation cuspidale unitaire d'un $GL(d')$ (cela définit d') et soit $s'\in\mathbb{R}$. On suppose que le groupe classique portant π' admet un sous-groupe parabolique standard maximal dont le Levi est isomorphe à $GL(d')\times$ un groupe classique, sinon la notation est vide. On note $\pi'[\rho',s']$, la projection de l'espace des termes constants de π' le long du radical unipotent du parabolique standard sur la représentation cuspidale $\rho'|\,|^{-s'}$ de $GL(d')$ (cf. [22]1.3.4). La non nullité de $\pi'[\rho',s']$ impose des conditions fortes à ρ',s' en particulier s' est nécessairement strictement positif et est un demi-entier (ici aussi on utilise les résultats annoncés d'Arthur).
Dans le théorème ci-dessous, s_0 vérifie les conditions nécessaires de 7 et si π^+ est non nulle, on suppose que π^+ a de la cohomologie.

Théorème *(i) L'espace des résidus* $\Big((s-s_0)E(\rho\times\pi,s)\Big)_{s=s_0}$ *est non nul exactement*

quand π^+ est non nulle et la représentation ainsi définie est alors irréductible isomorphe à π^+.
(ii) Soit ρ', s' un couple formé d'une représentation cuspidale unitaire d'un $GL(d_{\rho'})$ et d'un demi-entier strictement positif; on suppose que $\pi^+[\rho', s'] \neq 0$. Alors, il existe une représentation de carré intégrable π' d'un groupe classique de même type que G tel que $\pi^+ = \Big((s'-s'_0)E(\rho'\times\pi', s')\Big)_{s'=s'_0}$. C'est une égalité dans l'espace des formes automorphes du groupe convenable.

On montre (i) et (ii) simultanément par récurrence sur le nombre $S(\pi)$ défini pour toute représentation de carré intégrable, $\tilde{\pi}$ d'un groupe classique de même type que G par la formule : $S(\tilde{\pi}) := \sum_{(\rho',b')\in Jord(\tilde{\pi})}(b'-1)$.
Initions la récurrence : on suppose que $S(\pi)=0$. On sait alors que π est cuspidale (cf. par exemple les conditions nécessaires [19] 1.3). Alors (i) est démontré même dans sa version plus forte en 7.1 et le (ii) est clair car la non nullité entraîne que $\rho' \simeq \rho$ et $s'=s_0$.
On fixe un entier $N>0$ et on suppose que (i) et (ii) sont démontrées pour toutes les représentations $\tilde{\pi}$ ayant de la cohomologie et telles que $S(\tilde{\pi})<N$. On suppose que $S(\pi)=N$ et on démontre (i) et (ii).

On suppose d'abord que $\pi^+ \neq 0$; on calcule les termes constants

$$\Big((s-s_0)E(\rho\times\pi, s)\Big)_{s=s_0}[\rho, s_0]$$

avec une généralisation évidente de la notation déjà introduite. Cet espace est exactement l'image de l'opérateur d'entrelacement standard $(s-s_0)M(\rho|\,|^s\times\pi)$ évalué en $s=s_0$ appliqué à l'induite $\rho|\,|^{s_0}\times\pi$. Cet opérateur n'est autre que l'opérateur d'entrelacement normalisé et l'image est donc π^+. Ainsi l'espace des résidus est certainement non nul.
On suppose maintenant que l'espace des résidus est non nul et on montre que $\pi^+\neq 0$ et l'identification de π^+ avec l'espace des résidus. On sait que l'espace des résidus est formé de formes automorphes de carré intégrable : en effet la régularité du caractère infinitésimal de l'induite $\rho|\,|^{s_0}\times\pi$ assure que $(\rho, 2s_0+1)\notin Jord(\pi^{GL})$, les hypothèses de [19] 1.2.2 sont satisfaites et cette référence donne le résultat.
On fixe une sous-représentation irréductible, disons π'' (la notation va disparaître rapidement), de cet espace et on va montrer qu'elle est isomorphe à π^+, avec la multiplicité 1, cela suffira. Pour montrer cela, on va montrer que pour tout ρ', s'_0 tel que $\pi''[\rho', s'_0]\neq 0$, l'ensemble de ces termes constants vus comme sous-module de l'induite global de $\rho'|\,|^{-s'_0}\times\mathcal{A}(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ est une sous-représentation isomorphe à π^+.
D'après ce que l'on a vu ci-dessus, si $(\rho', s'_0)=(\rho_0, s_0)$, le résultat est clair. On suppose donc qu'il n'en est pas ainsi. On sait alors, par le calcul facile des termes constants des séries d'Eisenstein (cf. [22] II.1.7) que la projection des termes constants de π, $\pi[\rho', s'_0]$, est non nulle ; ainsi π n'est pas cuspidal et on lui applique (ii) : $\pi = \Big((s'-s'_0)E(\rho'\times\pi', s')\Big)_{s'=s'_0}$ pour un bon choix de représentation de carré intégrable π'. On change un peu les notations pour qu'elles soient plus explicites en remplaçant ρ par $\rho|\,|^s$ et ρ' par $\rho'|\,|^{s'}$. D'où :

$$\Big((s-s_0)E(\rho|\,|^s\times\pi, s)\Big)_{s=s_0} = \bigg((s-s_0)\Big((s'-s'_0)E(\rho|\,|^s\times\rho'|\,|^{s'}\times\pi', s, s')\Big)_{s'=s'_0}\bigg)_{s=s_0}. \quad (1)$$

On ne peut pas enlever les parenthèses dans le terme de droite et on doit distinguer suivant le signe de $s_0-s'_0$.

On suppose d'abord que $s_0 \geq s'_0$. Sous cette hypothèse, la fonction méromorphe de s, s' valant $(s-s_0)(s'-s'_0)E(\rho|\,|^s \times \rho'|\,|^{s'} \times \pi', f)$ où f est une fonction dans la bonne induite globale, est holomorphe au voisinage de $s = s_0, s' = s'_0$. Pour calculer le terme de droite ci-dessus, on peut évaluer dans l'ordre que l'on veut. On note $\sigma_{1,2}$ l'élément du groupe de Weil de $GL(d+d')$ qui échange les facteurs $GL(d) \times GL(d')$ et de longueur minimale dans sa double classe. Pour f comme ci-dessus $M(\sigma_{1,2}, s-s')f$ est bien défini ([23] 1.10 dit que les pôles de $M(\sigma_{1,2}, s-s')$ sont ceux de $L(\rho \times {\rho'}^*, s-s')/L(\rho \times {\rho'}^*, s-s'+1)$ qui n'en a pas) et on a l'équation fonctionnelle, qui est une égalité de fonctions méromorphes :

$$(s-s_0)(s'-s'_0)E(\rho|\,|^s \times \rho'|\,|^{s'} \times \pi', f) =$$
$$(s-s_0)(s'-s'_0)E(\rho'|\,|^{s'} \times \rho|\,|^s \times \pi', M(\sigma_{1,2}, s-s')f). \tag{2}$$

Le terme de gauche est une bonne fonction holomorphe au voisinage de $s = s_0, s' = s'_0$ alors que pour le terme de droite, il faut prendre plus de précaution. En effet soit f' une fonction dans l'induite $\rho|\,|^{s'_0} \times \rho|\,|^{s_0} \times \pi'$; on construit la fonction méromorphe $(s-s_0)(s'-s'_0)E(\rho'|\,|^{s'} \times \rho|\,|^s \times \pi', f')$. Cette fonction n'a aucune raison d'être holomorphe en $s = s_0, s' = s'_0$ par contre elle l'est si on la calcule d'abord sur l'hyperplan $s = s_0$ puis en $s' = s'_0$. En faisant cela on garde l'égalité de (2). Avec cette égalité, on calcule les termes constants relativement à ρ', s'_0 pour la série d'Eisenstein associé à f grâce à l'analogue pour la série d'Eisenstein associée à la fonction $f' := M(\sigma_{1,2}, s_0 - s'_0)f$. Ainsi les termes constants

$$\Big((s-s_0)E(\rho|\,|^s \times \rho'|\,|^{s'} \times \pi', s, s')\Big)_{(s=s_0)}[\rho', s'_0] \hookrightarrow$$
$$\Big((s'-s'_0)\Big((s-s_0)E(\rho'|\,|^{s'} \times \rho|\,|^s \times \pi', s', s)\Big)_{s=s_0}\Big)_{s'=s'_0}[\rho', s'_0].$$

On sait calculer le terme de droite c'est l'image par l'opérateur d'entrelacement convenable

$$\rho'|\,|^{s'_0} \times \Big((s-s_0)E(\rho|\,|^s \times \pi', s)\Big)_{s=s_0} \to \rho'|\,|^{-s'_0} \times \Big((s-s_0)E(\rho|\,|^s \times \pi', s)\Big)_{s=s_0}.$$

Il faut identifier cette représentation. On considère le diagramme où les opérateurs d'entrelacement sont les opérateurs d'entrelacement standard :

$$\begin{array}{ccc}
\rho|\,|^s \times \rho'|\,|^{s'} \times \pi' & \overset{M(\sigma_{1,2}, s-s')}{\longrightarrow} & \rho'|\,|^{s'} \times \rho|\,|^s \times \pi' \\
M(w, s, s') \downarrow & & \downarrow M(w', s', s) \\
\rho|\,|^{-s} \times \rho'|\,|^{-s'} \times \pi' & \overset{M(\sigma_{2,1}, s-s')}{\longleftarrow} & \rho'|\,|^{-s'} \times \rho|\,|^{-s} \times \pi'.
\end{array}$$

On note $N(w, s, s') := (s-s_0)(s'-s'_0)M(w, s, s')$ et $N(w', s', s) := (s-s_0)(s'-s'_0)M(w', s, s')$. On a alors encore un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\rho|\,|^s \times \rho'|\,|^{s'} \times \pi' & \overset{M(\sigma_{1,2}, s-s')}{\longrightarrow} & \rho'|\,|^{s'} \times \rho|\,|^s \times \pi' \\
N(w, s, s') \downarrow & & \downarrow N'(w', s', s) \\
\rho|\,|^{-s} \times \rho'|\,|^{-s'} \times \pi' & \overset{M(\sigma_{2,1}, s-s')}{\longleftarrow} & \rho'|\,|^{-s'} \times \rho|\,|^{-s} \times \pi'.
\end{array}$$

Tous les opérateurs considérés sont holomorphes en $s = s_0, s' = s'_0$ sauf précisément $N(w', s', s)$; cet opérateur doit être calculé d'abord sur l'hyperplan $s = s_0$ puis en $s' = s'_0$. On note $N'(w, s'_0, s_0)$ le résultat de ce calcul. Pour les opérateurs $M(\sigma_{1,2}, s-s')$ et $M(\sigma_{2,1}, s-s')$, on utilise [23] I. 10, comme ci-dessus. Le diagramme est commutatif.

Par hypothèse, on sait que $N'(w,s'_0,s_0)\circ M(\sigma_{1,2},s_0-s'_0)$ est non identiquement 0 ; cet opérateur a alors pour image la représentation irréductible image de $N'(w,s'_0,s_0)$; on note π'^{+} cette représentation.
Les 2 représentations sur une même colonne du diagramme sont en dualité naturelle ; et dans ces dualité $M(\sigma_{2,1},s-s')$ est l'application duale de $M(\sigma_{1,2},s-s')$. C'est-à-dire, que pour x dans l'induite en haut à gauche et y^* dans l'induite en bas à droite, on a :

$$< M(\sigma_{1,2},s_0-s'_0)x,y^* >=< x, M(\sigma_{2,1},s_0-s'_0)y^* > .$$

Soit y,y' dans l'induite en haut à droite (au point $s=s_0, s'=s'_0$) ;

$$< N'(w',s'_0,s_0)y,y' >= 0 \Leftarrow \text{ si } y \text{ ou } y' \in Ker\, N'(w',s'_0,s_0).$$

Ainsi l'application $(y,y')\mapsto < N'(w',s'_0,s_0)y,y' >$ induit une forme bilinéaire non dégénérée sur la représentation irréductible, $\pi'^{+}\simeq \big(\rho'|\,|^{s'_0}\times\rho|\,|^{s_0}\times\pi'\big)/Ker\,N'(',s'_0,s_0)$. Soit $x\in \rho|\,|^{s_0}\times\rho'|\,|^{s'_0}\times\pi'$ tel que $N'(w,s'_0,s_0)\circ M(\sigma_{1,2},s_0-s'_0)(x)\neq 0$. Comme l'image de $M(\sigma_{1,2},s_0-s'_0)$ n'est pas incluse dans le noyau de $N'(w',s'_0,s_0)$, avec les propriétés que l'on vient de voir, il existe $x'\in\rho|\,|^{s_0}\times\rho'|\,|^{s'_0}\times\pi'$ tel que :

$$< M(\sigma_{1,2},s_0-s'_0)x', N'(w,s'_0,s_0)\circ M(\sigma_{1,2},s_0-s'_0)(x) >\neq 0.$$

Cela vaut aussi

$$< x, M(\sigma_{2,1},s_0-s'_0)N'(w,s'_0,s_0)\circ M(\sigma_{1,2},s_0-s'_0)(x) >=< x, N(w,s_0,s'_0)x >\neq 0.$$

Ainsi l'opérateur $N(w,s_0,s'_0)$ est non nul et son image π^+ est aussi non nulle. Au passage, on a montré que $N'(w',s'_0,s_0)$ calculé comme expliqué est non nul et son image qui est une représentation irréductible est isomorphe à π^+ par la commutativité du diagramme.
On a la suite d'application

$$\Big((s-s_0)E(\rho\times\pi,s)\Big)_{s=s_0}[\rho',s'_0] = \Big((s-s_0)(s'-s'_0)E(\rho\times\rho'\times\pi',s,s')\Big)_{s'=s'_0,s=s_0}[\rho',s'_0]$$

$$\hookrightarrow \rho'|\,|^{-s'_0}\times\Big((s-s_0)E(\rho\times\pi',s)_{s=s_0}\Big)\to\rho'|\,|^{-s'_0}\times\Big((s-s_0)E(\rho\times\pi',s)_{s=s_0}\Big)[\rho,s_0].$$

La dernière flèche est non nulle et elle est alors nécessairement injective car par l'hypothèse de récurrence $\times\big((s-s_0)E(\rho\times\pi',s)\big)_{s=s_0}$ est irréductible. Le composé de ces applications représente la projection des termes constant de $\big((s-s_0)E(\rho\times\pi,s)\big)_{s=s_0}$ sur $\rho'|\,|^{-s'_0}\otimes\rho|\,|^{-s_0}$; cet espace n'est autre que l'image de

$$Im\,N(w',s'_0,s_0)\circ M(\sigma_{1,2},s_0-s'_0)\rho|\,|^{s_0}\times\rho'|\,|^{s'_0}\times\pi'.$$

On vient de voir que cette image est isomorphe à π^+ d'où l'isomorphisme cherchée pour terminer la preuve de (i) dans le cas où $s_0\geq s'_0$. On prouve aussi (ii) dans ce cas : l'égalité (2) (qui est une équation fonctionnelle) donne

$$\Big((s-s_0)(s'-s'_0)E(\rho\times\rho'\times\pi',s,s',f)\Big)_{s=s_0,s'=s'_0} =$$

$$\Big((s-s_0)\Big((s'-s'_0)E(\rho'\times\rho\times\pi',s,s',M(\sigma_{1,2},s_0-s'_0)f)\Big)_{s'=s'_0}\Big)_{s=s_0}.$$

Ceci inverse ρ et ρ' et prouve (ii) dans ce cas.

Il faut maintenant considérer le cas où $s_0 \le s'_0$; le cas $s_0 = s'_0$ a déjà été traité mais on le retrouve aussi ici. On considère le composé des entrelacements :

$$N(w, s, s') : \rho|\,|^s \times \rho'|\,|^{s'} \times \pi' \to \rho|\,|^{-s} \times \rho'|\,|^{-s'} \times \pi'$$

(c'est la même notation que ci dessus) avec $M'(\sigma_{1,2}, s' - s)$ qui correspond à l'échange de $\rho|\,|^{-s} \times \rho'|\,|^{-s'} \times \pi' \to \rho'|\,|^{-s'} \times \rho|\,|^{-s} \times \pi'$. Ici $M'(\sigma_{1,2}, s' - s)$ est holomorphe au voisinage de $s = s_0$ et $s' = s'_0$ par l'hypothèse $s_0 \le s'_0$; $N(w, s, s')$ doit être calculé d'abord sur $s' = s'_0$ puis sur $s = s_0$ pour avoir l'holomorphie en $(s, s') = (s_0, s'_0)$. On revient à (1) ci-dessus ; on calcule les termes constants du membre de gauche relativement à ρ', s'_0 et on trouve un sous-module de l'induite $\rho'|\,|^{-s'_0} \times \big((s - s_0)E(\rho \times \pi', s)\big)_{s=s_0}$. Cet espace est donc non nul, a fortiori. On applique (i) par récurrence à π' qui donne l'irréductibilité de l'espace $\big((s - s_0)E(\rho \times \pi', s)\big)_{s=s_0}$. Cette irréductibilité assure que l'application qui a un résidu associe sont terme constant relatif à $\rho|\,|^{-s_0}$ est injective et que l'espace ainsi engendré est l'image de l'opérateur d'entrelacement normalisé évident. On calcule alors les termes constant du 2e membre de (1) relativement à $\rho'|\,|^{-s'_0} \otimes \rho|\,|^{-s_0}$ et on obtient un espace non nul. Ces termes constant sont l'image de $M'(\sigma_{1,2}, s'_0 - s_0) \circ N(w, s_0, s'_0)$. Donc en particulier $N(w, s_0, s'_0)$ est non nul ; son image est π^+ ce qui donne la non nullité cherchée de π^+. De plus les termes constants cherchés, sont l'image de $M'(\sigma_{1,2}, s'_0 - s_0) \circ N(w, s_0, s'_0)$ et forment une représentation isomorphe à π^+. Cela termine la preuve de (i). Montrons encore (ii) dans ce cas.
On a ici le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\rho|\,|^s \times \rho'|\,|^{s'} \times \pi' & \overset{M'(\sigma_{1,2}, s'-s)}{\longleftarrow} & \rho'|\,|^{s'} \times \rho|\,|^s \times \pi' \\
N(w, s, s') \downarrow & & \downarrow N(w', s', s) \\
\rho|\,|^{-s} \times \rho'|\,|^{-s'} \times \pi' & \overset{M'(\sigma_{2,1}, s'-s)}{\longrightarrow} & \rho'|\,|^{-s'} \times \rho|\,|^{-s} \times \pi'.
\end{array}$$

Toutes les flèches sont holomorphe en $s = s_0, s' = s'_0$ sauf $N(w, s, s')$ qu'il faut calculer d'abord sur $s' = s'_0$ puis sur $s = s_0$. Le diagramme est toujours commutatif après cette évaluation. On sait que $M'(\sigma_{2,1}, s'_0 - s_0) \circ N(w, s_0, s'_0) \not\equiv 0$. Ceci est encore équivalent à ce que π^+ ne soit pas inclus dans le noyau de $M'(\sigma_{2,1}, s'_0 - s_0)$. Par dualité comme on l'a vu précédemment, ceci montre que l'image de $M'(\sigma_{1,2}, s'_0 - s_0)$ n'est pas incluse dans le noyau de $N(w, s'_0, s'_0)$. D'où aussi

$$N(w', s'_0, s_0) = M'(\sigma_{2,1}, s'_0 - s_0) \circ N(w, s_0, s'_0) \circ M'(\sigma_{1,2}, s'_0 - s_0) \not\equiv 0.$$

Comme l'image de $N(w', s'_0, s_0)$ est irréductible quand elle n'est pas nulle, cette image est nécéssairement isomorphe à π^+. Ainsi π^+ se réalise dans les résidus :

$$\Big((s' - s'_0)(s - s_0)E(\rho' \times \rho \times \pi', s', s)_{s=s_0, s'=s'_0}\Big).$$

Le terme entre parenthèse peut se calculer d'abord sur $s = s_0$ puis sur $s' = s'_0$ par holomorphie. On utilise ici encore le fait que π^+ est égal à l'espace des résidus $\big((s - s_0)E(\rho \times \pi, s)_{s=s_0}\big)$ par l'irriductibilité de (i) que l'on vient de prouver. On obtient donc (ii). Cela termine la preuve.

7.3 Remarque sur les pôles des séries d'Eisenstein

Dans cet remarque on donne un exemple d'une série d'Eisenstein formée avec un parabolique maximal et une représentation non de carré intégrable du Levi de ce parabolique ayant un pôle d'ordre 1 et dont l'espace des résidus est de carré intégrable.

Soit M un sous-groupe de Levi de G de la forme $GL(d)\times GL(d')\times G'$ pour G' un sous-groupe de G de même type que G ; on fixe ρ,ρ' des représentations cuspidales irréductibles et autoduales de $GL(d)$ et $GL(d')$ respectivement et π' une représentation de carré intégrable irréductible de G' ; on définit donc, en suivant Arthur, la représentation π'^{GL}, θ-discrète du groupe linéaire qui paramétrise le paquet de représentations de carré intégrable contenant π'.
Soit s_0, s'_0 des demi-entiers positifs strictement et on suppose que $s_0 = s'_0 + 1/2$. On suppose que les quotients de Langlands des représentations $\rho_v|\,|^{s_0}\times\rho'_v|\,|^{s'_0}\times\pi'_v$ aux places archimédiennes v ont de la cohomologie pour un bon système de coefficients.
On suppose aussi que $ordre_{s=s_0}r(s,\rho,\pi'^{GL})=-1$. On note $t := ordre_{s=1/2}L(\rho\times\rho',s)$ et on suppose que $ordre_{s'=s'_0}r(s,\rho',\pi'^{GL}) = t-1$; cela veut dire que $Jord(\pi'^{GL})$ contient $(\rho', 2s'_0-1)$ et $(\rho, 2s_0-1) = (\rho, 2s'_0)$ et que pour tout autre élément de la forme (ρ'', b''), si $b''=2s'_0$, $L(\rho\times\rho'',1/2)\neq 0$ et si $b''=2s_0$, $L(\rho\times\rho'',1/2)\neq 0$.
En termes plus explicites, écrivons $\pi'^{GL} = \times_{(\rho'',b'')\in Jord(\pi'^{GL})}Speh(\rho'',b'')$; le fait que $ordre_{s=s_0}r(s,\rho,\pi'^{GL})=-1$ assure que $Jord(\pi'^{GL})$ contient $(\rho,2s_0-1)$. On rappelle que par hypothèse $2s_0-1=2s'_0$. Ainsi, la fonction $r(s',\rho',\pi'GL)$ contient le facteur

$$\frac{L(\rho\times\rho',s'-s_0+1)}{L(\rho\times\rho',s'+s_0)} = \frac{L(\rho\times\rho',s'-s'_0+1/2)}{L(\rho\times\rho',s'+s'_0+1/2)}$$

et les autres termes de cette fonction ne fournissent aucun zéro mais fournissent un pôle.

Remarque 1 *On suppose que π' est cuspidale et que $L(\rho\times\rho',1/2)=0$, c'est-à-dire que $t\geq 1$. Alors les séries d'Eisenstein $E(\rho'\times\pi',s')$ sont holomorphes en $s'=s'_0$ et on note $\tilde\pi'$ la représentation automorphe qu'elles engendrent. Les séries d'Eisenstein $E(\rho\times\tilde\pi',s)$ sont holomorphes en $s=s_0$ si $t>1$ et si $t=1$ elles peuvent avoir un pôle en ce point. Dans ce cas l'espace des résidus $\big((s-s_0)E(\rho\times\tilde\pi',s)_{s=s_0}\big)$ est inclus dans l'ensemble des formes automorphes de carré intégrable.*

La première assertion concernant l'holomorphie des séries d'Eisenstein est un cas particulier du théorème 7 puisque $r(s',\rho',\pi'^{GL})$ n'a pas de pôle en $s'=s'_0$. On étudie les séries d'Eisenstein dépendant des variables s,s' au voisinage de s_0,s'_0 : $E(\rho\times\rho'\times\pi',s,s')$.
On calcule tous les termes constants ; ceci sont donnés par des opérateurs d'entrelacement partant de l'induite $\rho|\,|^s\times\rho'|\,|^{s'}\times\pi'$. Il y en a 8 :
l'identité qui est clairement holomorphe ;
$\rho|\,|^s\times\rho'|\,|^{s'}\times\pi'\rightarrow\rho'|\,|^{s'}\times\rho|\,|^s\times\pi'$ holomorphe car $s>s'$ dans le voisinage considéré et nécessairement $\rho\not\simeq\rho'$ par l'assertion d'existence de cohomologie ; on remarque pour la suite que le facteur global fait apparaître $L(\rho\times\rho',s-s')$ qui a un zéro en $s-s'=1/2$;
$\rho|\,|^s\times\rho'|\,|^{s'}\times\pi\rightarrow\rho|\,|^s\times\rho'|\,|^{-s'}\times\pi$ qui est holomorphe en $s=s_0$ et $s'=s'_0$ car la fonction $r(s',\rho',\pi'^{GL})$ n'a pas de pôle en $s'=s'_0$;
en composant avec un opérateur n'ayant clairement pas de pôles on a aussi l'holomorphie en $s=s_0, s'=s'_0$ de l'opérateur d'entrelacement $\rho|\,|^s\times\rho'|\,|^{s'}\times\pi\rightarrow\rho'|\,|^{-s'}\times\rho|\,|^s\times\pi$;
$\rho|\,|^s\times\rho'|\,|^{s'}\times\pi\rightarrow\rho'|\,|^{s'}\times\rho|\,|^{-s}\times\pi$, a un pôle sur $(s-s_0)$ (en général) d'ordre 1qui vient de la fonction $r(s,\rho,\pi'^{GL})$ en $s=s_0$ mais on a aussi un facteur $L(\rho\times\rho',s-s')$ qui vient de l'échange des 2 premier facteur ; on a donc holomorphie sur l'hyperplan $s'=s'_0$;
en composant avec un opérateur n'ayant clairement pas de pôles on a aussi l'holomorphie sur l'hyperplan $s'=s'_0$ de l'opérateur $\rho|\,|^s\times\rho'|\,|^{s'}\times\pi\rightarrow\rho|\,|^{-s}\times\rho'|\,|^{s'}\times\pi$;
$\rho|\,|^s\times\rho'|\,|^{s'}\times\pi\rightarrow\rho|\,|^{-s}\times\rho'|\,|^{-s'}\times\pi$ est holomorphe sur l'hyperplan $s'=s'_0$ par exemple, parce qu'il s'obtient en combinant le précédent avec l'opérateur $\rho'|\,|^{s'}\times\pi'\rightarrow\rho'|\,|^{-s'}\times\pi'$ que l'on a déjà étudié (c'est le 3e ci-dessus) ;

par contre l'opérateur $\rho|\,|^s \times \rho'|\,|^{s'} \times \pi \to \rho'|\,|^{-s'} \times \rho|\,|^{-s} \times \pi$ est identiquement 0 sur $s' = s'_0$ si $t > 1$ à cause de l'ordre de la fonction $r(s', \rho', \pi'^{GL})$ sur cet hyperplan. Par contre si $t = 1$ cette fonction global est inversible et la fonction $r(s, \rho, \pi'^{,GL})$ fourni alors un pôle d'ordre 1 en $s = s_0$. Pour être sûr qu'il y ait bien un pôle, il faut que les opérateurs d'entrelacement locaux n'aient pas de zéro après normalisation par le produit des fonctions $r(s', \rho', \pi'^{GL})r(s, \rho, \pi'^{GL})$. Mais rien ne force ces opérateurs à avoir un zéro : un cas où on n'a sûrement pas de zéro est le cas où les fonctions locales normalisant les opérateurs d'entrelacement sont holomorphes et pour cela il suffit que pour tout $(\rho'', b'') \in Jord(\pi'^{GL})$ on ait $s'_0 > (b'' - 1)/2$ et ceci est possible car les seuls (ρ'', b'') imposés sont $(\rho, 2s_0 - 1) = (\rho, 2s'_0)$ et $(\rho', 2s'_0 - 1)$.
Ainsi si on calcule les fonctions $(s - s_0)E(\rho|\,|^s \times \rho'|\,|^{s'} \times \pi', f)$ (pour f une section de l'induite) sur l'hyperplan $s' = s'_0$ puis en $s = s_0$, le résultat est une forme automorphe dont le seul termes constant non nul est dans l'induite $\rho'|\,|^{-s'_0} \times \rho|\,|^{-s_0} \times \pi'$; elle est donc de carré intégrable et nécessairement irréductible.
La preuve de la remarque est terminé. On va encore montrer comment l'espace des résidus, quand il est de carré intégrable s'obtient autrement et de façon conforme à nos résultats. Ici pour pourvoir utiliser 7.2, on suppose que l'on sait a priori que les représentations de carré intégrable irréductible ayant de la cohomologie interviennent avec multiplicité 1 dans le spectre discret.

Remarque 2 *On garde les hypothèses et notations précédentes et on note σ la représentation de carré intégrable définie par les résidus de la remarque 1 ; on suppose que σ est non nulle. Alors la représentation $\pi'^{+} := \big((s - s_0)E(\rho|\,|^s \times \pi', s)\big)_{s=s_0}$ est de carré intégrable et*

$$\sigma = \Big((s' - s'_0)E(\rho'|\,|^{s'} \times \pi'^{+}, s')\Big)_{s'=s'_0}.$$

Le fait que π'^{+} est de carré intégrable est évident (cf. 7.1). On a le diagramme commutatif d'opérateur d'entrelacement globaux :

$$\begin{array}{ccc} \rho|\,|^s \times \rho'|\,|^{s'} \times \pi' & \to & \rho'|\,|^{s'} \times \rho|\,|^s \times \pi' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho'|\,|^{-s'} \times \rho|\,|^{-s} \times \pi' & \simeq & \rho'|\,|^{-s'} \times \rho|\,|^{-s} \times \pi'. \end{array}$$

On regarde en toute place pour garder la commutativité, on ajoute les normalisations : pour la ligne du haut c'est la normalisation de Langlands-Shahidi et pour les colonnes ce sont celles que l'on a utilisées ici. On sait que la flèche de droite a une image nulle ou irréductible et on identifie alors le produit tensoriel en toute place de ces images à

$$\Bigg((s' - s'_0)\Big((s - s_0)E(\rho' \times \rho \times \pi', s', s)_{s=s_0}\Big)_{s'=s'_0}\Bigg);$$

pour cela on utilise d'abord 7.1 puis 7.2 (i). Avec la commutativité du diagramme ci-dessus, l'espace des résidus de la remarque est inclus dans celui que l'on vient d'écrire ; cela est conforme à 7.2(ii) et donne la remarque

7.4 Commentaires sur les formes automorphes de carré intégrable non cuspidales

Notre but, expliqué en [19], est d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres d'Arthur pour savoir quand une représentation automorphe irréductible de

carré intégrable n'est pas cuspidale. Le travail fait ici, dans le cas des représentations automorphes ayant de la cohomologie, clôt presque la question et on va expliquer ce qui manque pour conclure. On admet ici que toute représentation automorphe ayant de la cohomologie intervient avec multiplicité au plus 1 dans le spectre discret des groupes de même type que G.
Soit σ une forme automorphe de carré intégrable ayant de la cohomologie. On a montré en [19] que si σ n'est pas cuspidale, il existe une représentation de carré intégrable π d'un groupe de même type que G, une représentation cuspidale autoduale ρ d'un groupe GL convenable et un demi-entier s_0 tel que

$$\sigma \hookrightarrow \Big((s-s_0)E(\rho\times\pi,s)_{s=s_0}\Big). \tag{1}$$

On a en plus précisé comment s'obtient π^{GL} le paramètre du paquet de π à partir de σ^{GL} le paramètre du paquet de σ.
Avec les notations introduites dans cet article et en particulier en 7.2 on sait que (1) est équivalent à ce que $\sigma=\pi^+$; on a sûrement la non nullité. Cela veut dire qu'en toute place v, $\sigma_v=\pi_v^+$. En 5.3.2 on a construit π_v^+ en fonction de π_v, ici on fait l'inverse, en ayant σ_v on construit des paramètres pour une représentation dans le paquet associé à π^{GL}. Il y a une condition pour que ce soit possible : aux places archimédiennes, il faut que σ_v soit un quotient de Langlands convenable et aux places p-adiques il faut que les paramètres de σ_v soit dans l'image de 5.3.2 et la non surjectivité est celle de 2.5.2 : cette référence s'applique par étage comme expliqué en 5.3.2 et c'est dans les cas où il faut $t_0^+=t_0+1$ qu'il y a un défaut de surjectivité (c'est le même type de condition que dans le cas archimédien mais dans le cas archimédien les hypothèses sont tellement simplificatrices que l'on ne voit pas la difficulté). Même sans les avoir rendu totalement explicite on voit comment le fait que σ_v doit être de la forme π_v^+ donne des conditions nécessaires et quand ces conditions sont remplies on a des paramètres pour un unique élément du paquet associé à π^{GL}. On note cette élément σ_v^-, ici elle peut être 0 puisqu'elle n'est connu que par ses paramètres. Et on doit nécessairement avoir :

$$\pi \simeq \otimes_v \sigma_v^-. \tag{2}$$

Proposition *Pour que σ soit non cuspidal (on note $Jord(\sigma^{GL})$) les couples (ρ',b') tel que $\sigma^{GL}\simeq Speh(\rho',b')$), il faut et il suffit qu'il existe ρ une représentation cuspidale unitaire d'un certain GL et s_0 un demi-entier tels que*
(3) soit $s_0=1/2$ avec $L(\rho,r_G,s)$ a un pôle en $s=1$, soit $Jord(\sigma^{GL})$ contient $(\rho,2s_0-1)$;
(4) pour tout $(\rho',b')\in Jord(\sigma^{GL})$ tel que $b'=2s_0$, $L(\rho\times\rho',1/2)\neq 0$;
(5) pour toute place v, σ_v^- est défini et est non nulle ;
(6) la représentation $\sigma^-:=\otimes_v\sigma_v^-$ est une représentation automorphe de carré intégrable.

C'est un corollaire de 7.2 mais ce n'est pas satisfaisant car je pense que la condition (6) est inutile et plus exactement qu'elle est conséquence de la construction de σ^- à partir de σ ; si on a en tête la formule de multiplicité annoncée par Arthur, la condition de signe qui doit être vérifiée par σ^- résulte à mon avis de celle vérifiée nécessairement par σ. C'est l'intérêt d'avoir des paramètres, car le signe doit pouvoir se calculer en fonction des paramètres. C'est ce qui reste à faire.

8 Appendice

8.1 Propriétés des modules de Jacquet des représentations dans un paquet d'Arthur

Soit ψ un paramètre pour un paquet d'Arthur et soit π dans le paquet associé. On reprend les notations (ρ', A', B', ζ') pour décrire $Jord(\psi)$. Soit $[x, y]$ un segment et on fixe ρ. On suppose que ψ a bonne parité (pour simplifier)

Lemme *On suppose que $Jac_{x,\cdots,y}\pi \neq 0$, alors il existe un ensemble fini $[1, v]$ et pour tout $i \in [1, v]$, $(\rho, A_i, B_i, \zeta_i) \in Jord(\psi)$ tel que $\zeta_1 B_1 = x$, $A_v \geq |y|$ et pour tout $i \in [1, v[$, $B_{i+1} \leq A_i + 1$.*

On a montré ce lemme en [20] 2.7 sous l'hypothèse supplémentaire $|y| \geq |x|$ et $x \neq 0$. C'est en fait le cas le plus difficile et on va montrer les cas restants. Les cas restants sont les cas où $0 \in [x, y]$: en effet si $x \neq 0$, le cas non traité est celui où $|y| < |x|$. Supposons qu'il en soit ainsi ; le simple fait que $Jac_x\pi \neq 0$ nécessite qu'il existe (ρ, A, B, ζ) avec $\zeta B = x$. Et clairement $v = 1$ et $(\rho, A_1, B_1, \zeta_1) = (\rho, A, B, \zeta)$ convient. On suppose donc dans ce qui suit que $0 \in [x, y]$ et que $|y| > |x|$. Remarquons qu'il suffit de montrer l'assertion suivante : il existe (ρ, A, B, ζ) tel que $\zeta B \in [x, y]$ et $A \geq |y|$: en effet on sait déjà qu'il existe $(\rho, A_1, B_1, \zeta_1)$ avec $\zeta_1 B_1 = x$ et on fixe A_1 maximum avec cette propriété. Si $A_1 \geq |y|$, l'assertion du lemme est prouvée ; sinon on note ζ le signe de y et on remarque que $Jac_{x,\cdots,\zeta(A_1+1)}\pi \neq 0$. On applique l'assertion momentanément admise qui assure l'existe de $(\rho, A_2, B_2, \zeta_2) \in Jord(\psi)$ avec $\zeta_2 B_2 \in [x, \zeta(A_1 + 1)]$ et $A_2 \geq (A_1 + 1)$; on fixe un tel choix avec A_2 maximal. On remarque que $B_2 \leq sup(|x|, A_1 + 1) = A_1 + 1$. Si $A_2 \geq |y|$, le lemme est démontré et sinon on continue : supposons que l'on ait construit une suite d'éléments de $Jord(\psi)$ indéxée par $[1, v]$ vérifiant toutes les propriétés du lemme sauf $A_v \geq |y|$. On a donc certainement encore $Jac_{x,\cdots,\zeta(A_v+1)}\pi \neq 0$; l'assertion admise donne l'existence de $(\rho, A_{v+1}, B_{v+1}, \zeta_{v+1})$ avec $\zeta_{v+1} B_{v+1} \in [x, \zeta(A_v + 1)]$ et $A_{v+1} \geq A_v + 1$; d'où encore $B_{v+1} \leq A_v + 1$ et on la suite d'éléments indexée par $[1, v + 1]$ vérifie encore toutes les conditions du lemme sauf éventuellement $A_{v+1} \geq |y|$. En un nombre fini d'étapes, on obtient aussi cette dernière condition. Il reste à montrer l'assertion admise. On la montre d'abord pour les morphismes ψ ayant la propriété suivante : soit $(\rho', A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$; si $\rho' \simeq \rho$, soit $\zeta' B' \in [x, y]$ soit $|y| << B'$. Sous ces hypothèses, on reprend les définitions pour construire π à partir d'un paquet de représentations associé à des morphismes de restriction discrètes à la diagonale de $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$; on doit faire "descendre" pour arriver aux éléments de $Jord(\psi)$ de la forme (ρ, A', B', ζ') avec $\zeta' B' \in [x, y]$ car on peut s'arranger pour que ces éléments soient plus petit (dans l'ordre fixé) que ceux ne vérifiant pas cette propriété (prendre par exemple l'ordre sur les "B") ; on vérifie alors qu'il existe
(1) un ensemble totalement ordonné de demi-entiers relatifs, $\mathcal{E}$, tel que pour $c \in \mathcal{E}$ il existe $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ avec $\zeta' B' \in [x, y]$ et $|c| \leq A'$
(2) une représentation irréductible σ d'un groupe de même type que G vérifiant $Jac_z\sigma \neq 0$ seulement s'il existe $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ avec $\zeta' B' \notin [x, y]$ et $z = \zeta' B'$ et en particulier $z >> |y|$;
(3) et une inclusion $\pi \hookrightarrow \times_{c \in \mathcal{E}} \rho| |^c \times \sigma$.
La non nullité de $Jac_{x,\cdots,y}\pi$ entraîne la non nullité du même module de Jacquet pour l'induite que l'on vient d'écrire en (3). Ainsi, avec (2), il existe $c \in \mathcal{E}$ avec $|c| = |y|$. En appliquant (1), on obtient l'assertion cherchée.
On enlève maintenant l'hypothèse sur ψ ; en d'autres termes il faut considérer la situation suivante ; soit $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ et supposons qu'il existe ψ' dominant ψ tel que $Jord(\psi')$ diffère de $Jord(\psi)$ simplement en remplaçant $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ par $(\rho, A'+$

$1, B'+1, \zeta') \in Jord(\psi')$ et soit π' dans le paquet associé à ψ' tel que

$$\pi' \hookrightarrow \rho'| |^{\zeta'(B'+1)} \times \cdots \rho'| |^{\zeta'(A'+1)} \times \pi.$$

Dans cette situation, on suppose que le lemme est connu pour π' et que $\zeta'B' \notin [x,y]$ (en particulier $B' \neq 0$) et il faut démontrer le lemme pour π. Par hypothèse $Jac_{x,\cdots,y}\pi \neq 0$. Vérifions que $[\zeta'B', \zeta'A'] \cap [x,y] = \emptyset$: en effet si cette intersection est non vide, il y a a priori 2 possibilité, l'un des segments est inclus dans l'autre ou l'intersection est un segment qui contient une des extrémités de $[\zeta'B', \zeta'A']$ et une extrémité de $[x,y]$. Le segment $[x,y]$ contient 0 et ne peut donc être inclus dans $[\zeta'B', \zeta'A']$, le segment $[\zeta'B', \zeta'A']$ n'est pas inclus dans $[x,y]$ car $\zeta'B'$ n'y est pas. Donc il reste la possibilité où soit $\zeta'B'$ soit $\zeta'A'$ est dans $[x,y]$; on sait que $\zeta'B' \notin [x,y]$ par hypothèse ; on a donc soit $B' \geq |y|$ et a fortiori $\zeta'A' \notin [x,y]$ soit $\zeta'B'$ est de signe opposé à y avec $B' > |x|$. Dans ce dernier cas $\zeta'A'$ est aussi de signe opposé à y et a le signe de x en vérifiant aussi $A' > |x|$. On sait alors que pour tout $z \in [x,y]$ et pour tout $C \in [\zeta'(B'+1), \zeta'(A'+1)]$ l'induite $\rho| |^z \times \rho| |^C$ pour le GL convenable est irréductible. D'où aussi (avec (*) appliqué à π et à π') $Jac_{x,\cdots,y}\pi' \neq 0$. Le résultat connu pour π' montre l'existe de $(\rho, A'', B'', \zeta'') \in Jord(\psi')$ avec $\zeta''B'' \in [x,y]$ et $A'' \geq |y|$; nécessairement $(\rho, A'', B'', \zeta'') \in Jord(\psi)$ et on a le résultat pour π. Cela termine la preuve.

8.2 Propriété d'irréductibilité

Soit ψ comme précédemment et soit π dans le paquet associé à ψ et soit aussi ρ une représentation cuspidale unitaire d'un groupe GL et $x \in \mathbb{R}$. Un problème important est de savoir quand l'induite $\rho| |^x \times \pi$ est réductible. Je n'ai pas la réponse en général ; on a besoin ici du cas suivant :

Lemme *On suppose que ρ est autoduale que ψ est de bonne parité et que $x \neq 0$ vérifie : pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ soit $A < |x| - 1$ soit $B > |x|$. Alors pour tout π dans le paquet associé à ψ, l'induite $\rho| |^x \times \pi$ est irréductible.*

On fixe $\psi_>$ un morphisme dominant ψ et tel que $Jord(\psi_>)$ contient tous les éléments (ρ, A, B, ζ) de $Jord(\psi)$ tel que $A < |x| - 1$ et par contre pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ tel que $B > |x|$ l'image correspondant dans $Jord(\psi_>)$, écrite $(\rho, A + T_{\rho,A,B,\zeta}, B + T_{\rho,A,B,\zeta}, \zeta)$ (cf. 2.2) vérifie $T_{\rho,A,B,\zeta} >> 0$. On fixe π dans le paquet associé à ψ et on note $\pi_>$ la représentation dans le paquet associé à $\psi_>$ qui correspond à π. On remarque que $\rho| |^x \times \pi$ et $\rho| |^x \times \pi_>$ ont un unique sous-module irréductible noté σ et $\sigma_>$: ceci résulte de ce que $x \neq 0$ et $Jac_x\pi = Jac_x\pi_> = 0$; cette dernière assertion résulte de 8.1 appliqué à $y = x$ et du fait que pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ $\zeta'B' \neq x$ par hypothèse. Il en est de même des induites $\rho| |^{-x} \times \pi$ et $\rho| |^{-x} \times \pi_>$. Pour démontrer l'irréductibilité, il suffit donc de montrer que $Jac_{-x}\sigma \neq 0$ et $Jac_{-x}\sigma_> \neq 0$: en effet σ et $\sigma_>$ sont isomorphes à des quotients de $\rho| |^{-x} \times \pi$ et $\rho| |^{-x} \times \pi_>$ et par un simple calcul de module de Jacquet n'intervienent dans ces induites comme sous-quotient qu'avec multiplicité 1. Admettons momentanément que $Jac_{-x}\sigma_> \neq 0$ et montrons que $Jac_x\sigma \neq 0$: en effet on passe de $\pi_>$ à π en prenant des $Jac_{\zeta'C,\cdots,\zeta'D}$ pour des demi-entiers $C \leq D$ qui vérifie tous qu'il existe $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ avec $B' > |x|$ et $C \geq B' + 1$. Donc en particulier pour tout $C' \in [C, D]$ l'induite $\rho| |^{\pm x} \times \rho| |^{C'}$ est irréductible dans le GL convenable. Ceci montre que σ s'obtient à partir de $\sigma_>$ en prenant les mêmes modules de Jacquet ; de plus s'il existe $\sigma'_>$ avec une inclusion $\sigma_> \hookrightarrow \rho| |^{-x} \times \sigma'_>$ on a alors aussi par exactitude des modules de Jacquet l'existence d'une représentation σ', tel que $\sigma \hookrightarrow \rho| |^{-x} \times \sigma$. Ainsi l'irréductibilité de $\rho| |^{-x} \times \pi$ résulte de l'irréductibilité de $\rho| |^x \times \pi_>$.

Montrons l'irréductibilité de $\rho|\,|^x \times \pi_>$; on peut évidemment supposer que $x > 0$. On sait alors que l'opérateur d'entrelacement normalisé $\rho|\,|^x \times \pi \to \rho|\,|^{-x} \times \pi$ est holomorphe ([20]). Le facteur de normalisation n'a pas de pôle : avec les notations de 2.4, $a_0 = 1$, $b_0 = 2x + 1$ d'où $A_0 = x = B_0$ et $\zeta_0 = -$. Ainsi l'opérateur d'entrelacement normalisé coïncide à un scalaire non nul près à l'opérateur d'entrelacement standard qui est donc lui aussi holomorphe. Il suffit donc de démontrer que cet opérateur d'entrelacement standard est injectif. Pour avoir ce résultat, on montre qu'il existe

un morphisme ψ' tel que la restriction de ψ' à W_F fois la diagonale de $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ est sans multiplicité $Jord(\psi')$ contient tous les éléments $(\rho, \tilde{A}, \tilde{B}, \zeta)$ avec $\tilde{B} > |x|$ de $Jord(\psi_>)$ et d'autres éléments $(\rho, C', C'', \zeta''')$ vérifiant $C' < |x| - 1$

une représentation π' dans le paquet associé à ψ' et un ensemble $\mathcal{E}$ comme dans la preuve de 8.1 avec pour tout $z \in \mathcal{E}$, $|z| < x - 1$

et une inclusion $\pi_> \hookrightarrow \times_{z \in \mathcal{E}} \rho|\,|^z \times \pi'$.

La représentation $\rho|\,|^x \times \pi'$ est irréductible parce que les hypothèses de [17] 6.4 sont satisfaites ; les induites $\rho|\,|^z \times \rho|\,|^{\pm x}$ sont irréductibles pour tout $z \in \mathcal{E}$ dans le GL convenable car $|x - z| > 1$. Donc l'entrelacement décrit appliqué au membre de droite de l'inclusion ci-dessus est un isomorphisme et sa restriction à $\rho|\,|^x \times \pi$ est injective. Ainsi $\sigma_>$ est un sous-module de $\rho|\,|^{-x} \times \pi_>$ et c'est ce que l'on cherchait.

Références

[1] J. Adams, J. Johnson *Endoscopic groups and packets of non-tempered representations* Compositio Math., 64, 1987, pp. 271-309

[2] J. Arthur, *An introduction to the trace formula* Clay Mathematics Proceedings, volume 4, 2005, pp. 1-253

[3] N. Bergeron, L. Clozel, *Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques* Astérisque, 303, 2005, 214 pages

[4] J Franke *Harmonic analysis in weighted L^2-spaces* Ann. Sci. de l'ENS (4), 31, 1998, pp. 181-279

[5] J. Franke, *A topological model for some summand of the Eisenstein cohomology of congruence subgroups*, prépublication 1991, paru in Eisenstein series and applications édité par W. T. Gan, S. Kudla, Y. Tschinkel, Progress in Math 258, Birkhäuser, 2007

[6] G. Gotsbacher *Eisenstein cohomology for congruence subgroups of SO(n,2)*, prépublication 2008, archiv : 0803.0762

[7] H. Grobner *The automorphic cohomology and the residual spectrum of Hermintian groups of rank one*, prépublication 2009

[8] G. Gotsbacher, H. Grobner, *On the Eisenstein cohomology of odd orthogonal groups,* prépublication 2009, arXiv :0904.2562v111

[9] N. Grbac, J. Schwermer, *On residual cohomology classes attached to relative rank one Eisenstein series for the symplectic group*, prépublication 2009

[10] M. Harris, R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties,*Annals of Math Studies, 151, Princeton Univ. Press, 2001

[11] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL_n sur un corps p-adique,*Invent. Math., 139, 2000, pp. 439-455

[12] H. Jacquet, I. I. Piatetskii-Shapiro, J. A. Shalika, *Rankin-Selberg Convolutions,* American Journal of Mathematics, Vol. 105, No. 2, 1983, pp. 367-464

[13] J. Johnson *Stable base change $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ of certain derived functor modules* Math. Ann., 287, 1990, pp. 467-493

[14] H. Kasten *Cohomological Representations and Twisted Rankin-Selberg Convolutions*, Dissertation, Univ Karlsruhe, 2007

[15] C. Mœglin, *Sur certains paquets d'Arthur et involution d'Aubert-Schneider-Stuhler généralisée* ERT, volume 10, 2006, pp. 86-129

[16] C. Mœglin *Classification et Changement de base pour les séries discrètes des groupes unitaires p-adiques*, Pacific Journal of Math, 233-1, 2007, pp 159-204

[17] C. Mœglin, *Paquets d'Arthur discrets pour un groupe classique p-adique* prépublication 2004, à paraître dans le volume en l'honneur de S. Gelbart, AMS

[18] C. Mœglin, *Multiplicité 1 dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques* prépublication 2007, à paraître Volume en l'honneur de F. Shahidi

[19] C. Mœglin, *Formes automorphes de carré intégrable non cuspidales* Manuscripta Math, 127, 2008, pp. 411-467

[20] C. Mœglin, *Holomorphie des opérateurs d'entrelacement normalisés à l'aide des paramètres d'Arthur,* à paraître au Canadian Journal of Math

[21] C. Mœglin, M.-F. Vignéras, J.-L. Waldspurger *Correspondance de Howe sur un corps p-adique,* LN 129, 1987, Springer Verlag

[22] C. Mœglin, J. -L. Waldspurger, *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein ; une paraphrase de l'Ecriture* Birkhäuser, PM 113, 1994

[23] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de GL(n)* Ann. de l'ENS, 22, 1989, pp. 605-674

[24] F. Shahidi, *Local coefficients and normalization of intertwining operators for GL(n)* Comp. Math., 48, 1983, pp. 271-295

[25] F. Shahidi, *Local coefficients as Artin factors for real groups,* Duke Math. J., 52, 1985, pp. 973-1007

[26] D. Vogan, *Representations of real reductive Lie groups,* PM 15, Birkhäuser, 1981

[27] D. Vogan, G. Zuckerman, *Unitary representations with non zero cohomology* Compositio Math 53, 1984, pp. 51-90